

ANTONIO TRAJANO

ALGEBRA ELEMENTAR

Segunda edição, com adições e alterações, para servir de texto
primário, e de referência em aulas e estudos
de álgebra elementar

$$\begin{aligned}x^2 + p^2 &= q^2 \\x^2 + p^2 - p^2 &= q^2 - p^2 \\x^2 + p^2 &= \sqrt{q^2 - p^2} \\x &= -p \pm \sqrt{q^2 - p^2} \\x^2 &= -p \pm \sqrt{q^2 - p^2}\end{aligned}$$

LITRACIA FRANCISCA ALVES

112, Rua do Ouvidor, 112 — Rio de Janeiro

A. 1914

BRASIL, 1914

1914, 112, Rua do Ouvidor, 112 — Rio de Janeiro, 1914

Extracto do Catalogo da Livreria Francisco Alves

Exame de Admissão para os Gymnasios — (Portu- guez — Historia do Brasil — Geographia — Arithmetica — Desenho e Morphologia Geome- trica — ciencias Physicas e Naturaes, pelos professores João Ribeiro e Itaja Cabralina		82000
Algebra (Elementos de), pelo Dr. José Joaquim de Queiroz, professor da Escola Normal do Distri- cto Federal, 1 vol. cart.		42000
Algebra por H. R. Goursat, augmentada com muitas notas e adições ao texto, por G. S. M. 1 vol. de 370 pags., cart.		14000
Algebra Elementar , curso theorico e pratico, in- cluindo as equações do 2.º grão e progressões, por Antonio Trajano 1 vol. cart.		51000
Curso de Algebra Ric. Alt. , por Antonio Trajano, 1 vol. br.		27000
Algebra Elementar — Theorica e pratica, de accordo com os programmaes das escolas secundarias, por S. L. (Dr. S. L. do), 1 vol. in-8.º com 281 paginas vitas recente impressas, cart.		88000
Algebra Elementar , por Sebastião Francisco Alves, 1 vol. in-8.º, cart.		122000
Exercícios de Algebra , por H. Costa, Euclides Rêgo Castro (Do Collegio Pedro II), 1 vol.		50000
Geometria applicada , Theoria das sombras — Theo- ria das imagens brilhantes — Perspectiva — desenho por Carlos Sampaio, lente da Escola Poly- technica do Rio de Janeiro, 1 vol., br. 48, enc.		61000
Curso de Geometria , por Timotheo Pereira, obra adaptada ao Collegio Pedro II, 1 vol. in-8.º, cart.		704000
Exercícios de Geometria , por H. Costa, Euclides Rêgo — O. Castro (Do Collegio Pedro II),		53000
Geometria , de accordo com o pro- gramma official, com numerosos problemas em prova occulta no Collegio Pe- dro II, por Isaac Reikhsahn e Lynn Davidovich, tradução do Dr. Henrique Costa,		57100
Geometria , Geometrias, apresentadas em figuras, 1 vol. in-8.º, cart.		112000
Geometria , Geometria, apresentadas em figuras, 1 vol. in-8.º, cart.		12000
Geometria , Geometria, apresentadas em figuras, 1 vol. in-8.º, cart.		13500
Geometria , Geometria, apresentadas em figuras, 1 vol. in-8.º, cart.		68000

6-

ALGEBRA ELEMENTAR

OBRA DO MESMO AUTOR

Arithmetica Primaria para meninos e meninas que começam o estudo de Arithmetica nas escolas primarias, contendo toda o ensino exposto em lições perfeitamente graduadas, e acompanhadas de numerosas exercicios, problemas e figuras para tornar o estudo de Arithmetica mais attractivo ás crianças.

\$500

Arithmetica Elemental Illustrada para as classes mais adiantadas das escolas, contendo toda a materia da Arithmetica que deve ser ensinada nas aulas primarias. Obra premiada pelo Jury da Exposição Pedagogica do Rio de Janeiro, approvada e adoptada unanimemente pelo Conselho Superior da Instrução Publica da Capital Federal, cartonada.

2\$000

Arithmetica Progressiva, curso completo theorico e pratico da Arithmetica para o ensino secundario e superior, contendo todos os esclarecimentos uteis sobre este importante ramo da sciencia, obra adoptada em muitas escolas normaes, lyceus e outros estabelecimentos de educação superior, refundida, ampliada e completa, cartonada.

5\$000

Algebra elemental, contendo um curso theorico e pratico deste importante ramo das mathematicas, incluindo equações do segundo grau e progressões, exposto por um methodo tão simples e facil que dispensa o auxilio do professor, cartonada.

5\$000

Nova Chave da Arithmetica Progressiva

1\$000

Nova Chave da Algebra Elemental. Esta Chave dá a solução completa de todos os problemas e difficuldades da Algebra Elemental, e é de grande vantagem para o estudo desta disciplina.

2\$000

Estudo da Lingua Vernacula, contendo o ensino methodico e consequente da etymologia, prosodia e orthographia, exposto por um systema novo, gradualmente desenvolvido e exemplificado, e que dá todo o esclarecimento preciso para o conhecimento aperfeiçoado destas materias, 1 vol. cart.

2\$000

ALGEBRA ELEMENTAR

CONTENDO UM CURSO THEORICO E PRATICO DESTA RAMO DA SCIENCIA
INCLUINDO AS EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU E PROGRESSÕES,
EXPOSTO POR UM METHODO FACILIMO,
SIMPLES E MUITO COMPREHENSIVEL

PELO PROFESSOR

ANTONIO TRAJANO

Autor da Arithmetica Primaria, Arithmetica Elemental
e Arithmetica Progressiva Superior

15.^a EDIÇÃO

CUIDADOSAMENTE REVISTA

LIVRARIA FRANCISCO ALVES

166, Rua do Ouvidor, 166 — Rio de Janeiro

S. PAULO

SENA HORRIGERS

42-A, Rua Libero Badurê

Rua da Bahia, 1061

1932

Obras do professor Antonio Trajano

PARA O ENSINO DE MATHEMATICA

Arithmetica Primaria para os meninos e meninas que comecem o estudo da Arithmetica nas escolas primarias, tratando as quatro operacoes sobre numeros inteiros e fracções, expostas de modo mais simples, por meio de lições graduadas, e acompanhadas de exercicios e problemas propostos para a primeira applicação da calculo.

Arithmetica Elemental Illustrada para as classes mais adiantadas das escolas, contendo toda a materia da Arithmetica, que deve ser ensinada nas escolas primarias, exposta por um methodo attractivo e delectavel e ornada de muitas gravuras adequadas ao texto. Obra premiada pelo jury da Exposição Pedagogica de São de Janeiro, e adoptada pela instrução publica em quasi todas as escolas do Brazil.

Arithmetica Progressiva, curso completo, theorico e pratico de Arithmetica para o ensino secundario e superior, contendo todos os methodos mais usados sobre este importante ramo da sciencia. Obra adoptada em muitas escolas normaes, lyceus e outros estabelecimentos de educação superior.

Chave da Arithmetica Progressiva. Esta obra contém a solução completa de todos os problemas difficeis da Arithmetica Progressiva; contém tambem a resposta de todos os exercicios e problemas que nesta Arithmetica não foram resolvidos, contém ainda alguns exercicios interessantes para serem propostos aos discipulos.

Com esta chave, qualquer professor poderá satisfazermente o sem difficuldade alguma leccionar pela **Arithmetica Progressiva**, certo de que não encontrará difficuldade alguma em todo o curso deste compendio.

Algebra Elemental, contendo um curso theorico e pratico deste ramo da sciencia, incluindo as equações do segundo grau e progressões, exposto por um methodo facilissimo, simples e muito comprehensivel.

Chave da Algebra. Esta obra apresenta a solução de todos os problemas e difficuldades da Algebra Elemental, e é de grande vantagem para o estudo desta disciplina.

Observação

O direito de reprodução destas obras é reservado.
Todo exemplar desta obra terá a chancela do Author.

Antonio Trajano

PREFACIO

Na Inglaterra, na França, na Alemanha e principalmente nos Estados Unidos, a Algebra é considerada como um dos ramos mais uteis e interessantes da instrução. Tal é a importancia que alli se dá a esta materia, que já foi incluída como parte do ensino obrigatorio nas escolas primarias, onde os meninos e meninas aprendem a converter facilmente os dados de um problema em uma equação algebraica.

Calcula-se que mais de quatrocentos mil compendios de Algebra se consomem annualmente nos Estados Unidos, e isto é sufficiente para nos dar uma idéa do modo por que se aprecia e desenvolve este ramo de estudo naquella grande e adiantada nação americana.

Não ha alli ensino secundario ou superior de qualquer natureza que seja, que dispense o estudo acurado de Algebra; no entanto, entre nós, nem mesmo nas faculdades de direito se exige o exame de Algebra como preparatorio para o estudo das sciencias sociais e juridicas! E, se nestes estabelecimentos de educação superior se dá tão pouco aprego a esta disciplina, que fará nos lyceus e collegios onde nem mesmo Arithmetica se ensina com perfeição?

Para podermos avaliar como esta materia é abandonada, ou para melhor dizer, ignorada entre nós, bastará só reflectirmos que, se exceptuarmos os homens formados em qualquer dos ramos das mathematicas, será bem difficil acharmos em nossas cidades pessoas que tenham conhecimento de Algebra.

Felizmente já vemos signaes de grande melhoramento. O Estado de S. Paulo, que nestes ultimos annos tanto se tem avantajado, ao ponto de apresentar um desenvolvimento material e uma actividade que causam pasmo, chegado a este grau de engrandecimento, não pôde supportar por mais tempo o systema atrozado e rotineiro de ensino que os seus antepassados lhe legaram, e por isso caba de fazer uma reforma completa na instrução publica. Introduzindo, entre outros melhoramentos, o ensino obrigatorio de Algebra nas escolas primarias.

Este exemplo será em breve seguido por outros Estados, e, em poucos annos, veremos a nossa mocidade aproveitar-se, com grande vantagem, da força dessa alavanca poderosa do calculo, chamada algebra.

Para ajudarmos a desenvolver o gosto por este estudo tão proveitoso, apresentamos agora este compendio, que pela sua simplicidade, clareza e methodo, muito contribuirá para despertar nos discipulos o interesse e gosto por esta materia que, ao mesmo tempo que é tão util para a vida, é tambem tão recreativa para o espirito.

Para tornarmos mais attractivo e ameno este estudo, abrandámos quanto foi possível o rigor algebrico; empregamos em todo o livro uma linguagem simples e apropriada; exemplificamos todas as theorias, resolvendo todas as difficuldades, e illustrando cada ponto com numerosos exercicios e problemas interessantes e recreativos, e finalmente, abundamos em notas, explicações e referencias, porque sabemos que muitos daquellas que hão de estudar por este compendio, não terão outro explicador nem outro auxiliar além do livro que lhes servirá de mestre.

Aquelles que estudarem com attenção este pequeno curso de Algebra, não perderão o seu tempo, porque não sómente desenvolverão o seu raciocinio, e esclarecerão o seu espirito, mas ficarão tambem habilitados para resolver muitos calculos que, de modo algum, resolveriam só com o auxilio da Arithmetica.

ALGEBRA ELEMENTAR

1. Algebra é a parte das mathematicas que resolve os problemas, e demonstra os theoremas quando as quantidades são representadas por letras.

2. Symbolos algebricos são letras, numeros e signaes com que se exprimem as quantidades, e effectuam as operações.

3. Problema é uma questão que requer uma ou mais quantidades desconhecidas que se tem de obter por meio de quantidades conhecidas.

As quantidades conhecidas chamam-se dados do problema; as quantidades desconhecidas chamam-se incognitas, e o processo por meio do qual se acham as quantidades desconhecidas, chama-se solução.

4. As quantidades conhecidas são representadas pelas primeiras letras do alphabeto: *a, b, c, d*, etc. As quantidades desconhecidas são representadas pelas ultimas letras: *x, y, z*. Estas representações symbolicas tem o nome de quantidades algebricas.

Duas ou mais quantidades podem tambem ser representadas pela mesma letra, mas neste caso é necessario distinguila com um ou mais accento ou linhas, como x' , x'' , x''' , que se lê: x' primo, x'' segundo, x''' terceiro.

5. Theorema é uma proposição que mostra alguma relação ou propriedade das quantidades algebricas, e que pôde tornar-se evidente por meio de uma demonstração.

6. Em Algebra, as quantidades determinadas são representadas pelos dez algarismos:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

7. Os signaes algebricos tem por fim indicar abreviadamente as operações que se tem de effectuar, e mostrar alguma relação que ha entre as quantidades algebricas,

Os seguintes signaes tem em Algebra a mesma significação que em Arithmetica:

$+$ lê-se: mais.

$-$ lê-se: menos.

\times lê-se: multiplicado por ou vezes.

\div lê-se: dividido por.

$=$ lê-se: igual a.

\approx lê-se: mais ou menos.

$>$ lê-se: maior do que.

$<$ lê-se: menor do que.

$\sqrt{\quad}$ lê-se: raiz.

∞ lê-se: está para.

∞ lê-se: infinito.

$()$ Chama-se parenthesis.

\cdot chama-se pincto.

Explicação dos signaes algebricos

8. O signal $=$, escripto entre duas quantidades, mostra que estas quantidades são iguaes em valor. Assim, a expressão $a = 3$, que se lê: *a* igual a 3, quer dizer que a quantidade representada pela letra *a* é igual a 3, isto é, tem o valor de 3.

9. O signal $+$, escripto entre duas quantidades, mostra que a segunda quantidade deve ser somada com a primeira. Assim, $a + b$, que se lê: *a* mais *b*, quer dizer que a quantidade representada pela letra *b* deve juntar-se com a quantidade representada pela letra *a*. Se *a* fosse igual a 2, e *b*, igual a 3, o resultado da expressão seria: $a + b = 2 + 3 = 5$.

10. O signal $-$, escripto entre duas quantidades, mostra que a segunda quantidade deve ser subtrahida da primeira. Assim, $a - b$, que se lê: *a* menos *b*, quer dizer que a quantidade representada pela letra *b* deve ser subtrahida da quantidade representada por *a*. Se *a* fosse igual a 5, e *b* igual a 3, o resultado seria: $a - b = 5 - 3 = 2$.

11. O signal $+$ chama-se tambem signal positivo, e o signal $-$ chama-se signal negativo. Toda a quantidade algebrica deve ser precedida por um destes signaes: a quantidade precedida do signal $+$, chama-se quantidade positiva, e a precedida do signal $-$, chama-se quantidade negativa. Quando o primeiro termo de uma expressão não tiver signal algum, subentende-se o signal $+$. Assim, $a - b$ quer dizer $+a - b$.

12. Duas quantidades tem signaes iguaes, quando ambos os signaes são positivos ou ambos negativos. Tem signaes contrarios, quando um é positivo e outro negativo. Assim, a quantidade $+a$ e $+b$ ou $-a$ e $-b$ tem signaes iguaes; mas $+a$ e $-b$ tem signaes contrarios.

13. O signal \times , escripto entre duas quantidades, mostra que a primeira deve ser multiplicada pela segunda. Assim,

$a \times b$, que se lê: *a* multiplicado por *b*, quer dizer que a quantidade representada pela letra *a* deve ser multiplicada pela quantidade representada por *b*; de sorte que se a letra *a* fosse igual a 4, e *b* igual a 5, o resultado seria $a \times b = 4 \times 5 = 20$.

14. Representa-se o producto de duas ou mais letras, escrevendo-se essas letras unidas umas ás outras, como $a \times b = ab$; $b \times c \times d = bcd$.

Representa-se tambem o producto, escrevendo-se as letras separadas por um ponto, como $b \times c \times d = b.c.d$; mas este modo cahiu em desuso, porque se confunde com outras expressões algebricas.

15. As quantidades que devem ser multiplicadas chamam-se *factores*. Se o factor é um numero, chama-se *factor numeral*, isto quer dizer representado por um numero. Se o factor é uma letra, chama-se *factor litteral*, isto quer dizer representado por uma letra. Assim, $2 \times a \times b \times c$ são quatro factores que, multiplicados, dão o producto $2abc$. O factor 2 é factor numeral e *a*, *b* e *c* são factores litteraes.

16. Seja qual for a ordem em que escrevermos as letras de um producto, o resultado será sempre o mesmo. Assim, $a \times b \times c = abc$; $b \times c \times a = bca$; $c \times a \times b = cab$. Ora, abc , bca e cab são quantidades iguaes, como vamos provar na seguinte

Mostração. Se damos á letra *a* o valor de 2; á *b* o valor de 3, e á *c* o valor de 4, teremos nas tres ordens de factores abc , bca e cab o mesmo producto, como vamos no lado.

$$abc = 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$bca = 3 \times 4 \times 2 = 24$$

$$cab = 4 \times 2 \times 3 = 24$$

Para haver uniformidade no modo de exprimir um producto, escrevem-se sempre as letras na ordem alphabetica; assim, o producto de $c \times a \times d \times b = abcd$.

Nota. O signal \times é quasi sempre omitido em Algebra; pois em lugar de se escrever $a \times b$, escreve-se logo o producto que é ab .

17. O signal \div , escripto entre duas quantidades, mostra que a primeira quantidade deve ser dividida pela segunda. Assim, $a \div b$, que se lê: *a* dividido por *b*, quer dizer que a quantidade representada pela letra *a* deve ser dividida pela quantidade representada por *b*. Se a letra *a* fosse igual a 6, e *b* igual a 2, o resultado seria $a \div b = 6 \div 2 = 3$.

18. Em algebra como em arithmetica, indica-se o quociente na forma de uma fracção, escrevendo o divisor debaixo do dividendo, como $a \div b = \frac{a}{b}$. Omittie-se sempre o signal da divisão, e escreve-se logo o quociente $\frac{a}{b}$ que tambem se lê: *a* dividido por *b*.

19. O signal $>$, escripto entre duas quantidades, mostra que uma quantidade é maior do que a outra. A abertura do signal mostra a quantidade maior. Assim, $a > b$, que se lê: *a maior do que b*, quer dizer que a quantidade representada pela letra a é maior do que a representada pela letra b ; assim também a expressão $c < d$, quer dizer que c é menor do que d . Sendo c igual a 4, e d igual a 7, o resultado será $c < d$ ou $d > c$ pois de $4 < 7$ deduz-se que $7 > 4$.

Quando não se sabe qual é a quantidade maior de uma desigualdade, escrevem-se dois sinais em sentido contrario, como $a > < b$, que se lê: *a maior ou menor que b*.

Exercícios sobre os symbolos algebricos

20. Damos em seguida alguns exercicios sobre os symbolos algebricos para familiarizar os discipulos com o uso das letras, e o emprego dos signaes.

Nestes exercicios daremos ás letras a, b, c e d os seguintes valores:

$$a=2, \quad b=3, \quad c=4, \quad d=6$$

Problema. Qual é o valor $a+4b-3c$?

Solução. $a=2$, $4b=4 \times 3=12$, e $3c=3 \times 4=12$. Então o valor de $a+4b-3c$ é $2+12-12=2$.

Operação
 $a+4b-3c$
 $2+12-12=2$

Achar o valor das seguintes expressões:

1. $3a+b+c$.	Resp. 13	5. $2d+c-5a$.	Resp. ?
2. $4a+2b+c$.	" 18	6. $8+c-2b$.	" ?
3. $a+3b+d$.	" 17	7. $3a+3b+3c$.	" ?
4. $c+2b-d$.	" 18	8. $2c-d+15$.	" ?

Problema. Qual é o valor da expressão $a+bc+2d$?

Solução. $a=2$, $bc=3 \times 4=12$, e $2d=2 \times 6=12$. Então o valor de $a+bc+2d$ é $2+12+12=26$.

Operação
 $a+bc+2d$
 $2+12+12=26$

Achar o valor das seguintes expressões:

9. $2ab+5c-d$.	Resp. 26	13. $ac+d-a$	Resp. ?
10. $5bc+d-2ab$.	" 54	14. $bd+c-d$.	" ?
11. $ab+bc+cd$.	" 42	15. $ab+bc-ac$.	" ?
12. $b+2ab-c$.	" 11	16. $2cd+5ab$.	" ?

Problema. Qual é o valor da expressão $a+2b+\frac{c}{b}$?

Solução. $a=2$, $2b=2 \times 3=6$, e $\frac{c}{b}=\frac{4}{3}=2$.
 O valor desta expressão é $2+6+2=10$.

Operação
 $a+2b+\frac{c}{b}$
 $2+6+2=10$

Achar o valor das seguintes expressões:

17. $a+\frac{d}{a}+d$.	Resp. 11	21. $ab+c+\frac{6}{3}$.	Resp. ?
18. $2b+\frac{d}{2}-a$.	" 6	22. $dc-a+\frac{d}{c}$.	" ?
19. $\frac{c}{a}+\frac{d}{b}+6$.	" 10	23. $\frac{d}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{a}$.	" ?
20. $ad+ab+\frac{d}{a}$.	" 21	24. $a+\frac{ad}{c}$.	" ?

Nota. É necessario que o discipulo comprehenda, que as letras a, b, c e d não representam respectivamente os valores, 2, 3, 4 e 6, ellas podem representar qualquer valor segundo os dados de um problema.

Definições de alguns termos algebricos

21. Vamos agora definir alguns termos algebricos que os discipulos precisam conhecer, e guardaremos a definição dos outros para os seus respectivos logares.

22. **Coefficiente** é um numero prefixo a uma quantidade representada por letras para mostrar quantas vezes essa quantidade deve ser tomada. Assim, em $4x$, o coefficiente é 4, e mostra que a letra x deve ser tomada quatro vezes que são $x+x+x+x=4x$.

O coefficiente pode ser um numero ou uma letra; se é um numero, chama-se **coefficiente numeral**; se é uma letra, chama-se **coefficiente literal**. Assim, na quantidade ay , a letra a é o coefficiente de y , porque mostra que y tem de ser tomado a vezes. Se a fór igual a 5, então y será tomado 5 vezes.

O coefficiente numeral escreve-se sempre antes das letras que representam uma quantidade, como $8xy$, $16abcx$, etc.

23. Quando nenhum coefficiente numeral estiver prefixo a uma quantidade algebrica, subentende-se sempre o coefficiente 1; pois x é o mesmo que $1x$; bcx é o mesmo que $1bcx$.

24. **Potencia** de uma quantidade é o producto dessa quantidade multiplicada por si mesma, uma ou mais vezes.

Quando uma quantidade é tomada duas vezes como factor, o producto chama-se **quadrado** ou **segunda potencia** dessa

quantidade; quando é tomada tres vezes como factor, o producto chama-se cubo ou terceira potencia; quando é tomada quatro vezes como factor, chama-se quarta potencia, etc. Assim,

A segunda potencia de 2 é 4, porque $2 \times 2 = 4$.
 A terceira potencia de 2 é 8, porque $2 \times 2 \times 2 = 8$.
 A segunda potencia de a é aa , porque $a \times a = aa$.
 A terceira potencia de a é aaa , porque $a \times a \times a = aaa$.
 A quarta potencia de a é $aaaa$, porque $a \times a \times a \times a = aaaa$.

26. Expoente é o numero escripto no alto direito de uma quantidade para mostrar a que grau de potencia ella deve ser elevada, ou quantas vezes ella deve ser tomada como factor.

Em lugar de repetirmos muitas vezes a mesma letra, para exprimir o grau de uma potencia, empregamos, por abreviatura, um expoente para esse fim. Assim,

$$\begin{array}{l|l} 2 \times 2 = 2^2 & a \times a = aa = a^2 \\ 2 \times 2 \times 2 = 2^3 & a \times a \times a = aaa = a^3 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4 & a \times a \times a \times a = aaaa = a^4 \\ 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 & a \times a \times a \times a \times a = aaaaa = a^5 \end{array}$$

Os algarismos 2, 3, 4 e 5, escriptos no alto direito do algarismo 2 e da letra a , são os seus expoentes.

28. Os symbolos que representam as potencias lêem-se do seguinte modo:

x^4 lê-se: x elevado á quarta potencia, ou a quarta potencia de x .
 x^m lê-se: x elevado á potencia m .
 x^0 lê-se: x elevado á potencia zero.

Observação. É necessário que o discipulo comprehenda perfectamente a differença entre coefficiente e expoente. Nos Ex. 3 e 4, coefficiente, e mostra que a deve ser tomada 3 vezes como parcella. Eip 3^4 , 3 é expoente, e mostra que a deve ser tomada 3 vezes como factor em uma multiplicação.

Tomando-se a x o valor de 5, podemos facilmente notar a differença numerica destas duas expressões:

$$3x = x + x + x = 5 + 5 + 5 = 15.$$

$$x^3 = x \times x \times x = 5 \times 5 \times 5 = 125.$$

27. Raiz de uma quantidade é o factor que multiplicado por si uma ou mais vezes produz essa quantidade.

A raiz chama-se quadrada, quando é tomada duas vezes como factor; chama-se cubica, quando é tomada tres vezes como factor; chama-se quarta raiz, quando é tomada quatro vezes como factor, e assim por diante. De sorte que,

A raiz quadrada de 25 é 5, porque $5 \times 5 = 25$.
 A raiz cubica de 125 é 5, porque $5 \times 5 \times 5 = 125$.
 A raiz quadrada de a^2 é a , porque $a \times a = a^2$.
 A raiz cubica de a^3 é a , porque $a \times a \times a = a^3$.
 A quarta raiz de a^4 é a , porque $a \times a \times a \times a = a^4$.

Nestes exemplos vê-se que 5 é a raiz quadrada de 25, e a raiz cubica de 125; a é a raiz quadrada de a^2 , a raiz cubica de a^3 , e a quarta raiz de a^4 , etc.

28. Radical é a figura $\sqrt{\quad}$, que se escreve sobre uma quantidade para mostrar que se deve extrahir della a raiz indicada pelo indice.

29. Indice do radical é o numero que, escripto no angulo do signal radical, mostra o grau da raiz que deve ser extrahida. Assim,

$\sqrt{9}$ lê-se: a raiz quadrada de 9.

$\sqrt[3]{27}$ lê-se: a raiz cubica de 27.

\sqrt{a} lê-se: a raiz quadrada de a .

$\sqrt[3]{xy}$ lê-se: a raiz cubica de xy .

$\sqrt[4]{abc}$ lê-se: a quarta raiz de abc .

Os numeros 2, 3 e 4, escriptos nos angulos dos signaes radicacs, são os indices das raizes.

Nota. Na raiz quadrada, supprime-se o indice 2, e escreve-se simplesmente o signal radical; assim, \sqrt{a} lê-se: raiz quadrada de a .
 O signal $\sqrt{\quad}$ é uma das formas arábicas da letra r , inicial da palavra raiz.

Exercícios sobre os symbolos das potencias

30. Damos em seguida alguns exercicios para os discipulos comprehenderem o valor dos symbolos algebricos que representam as diversas potencias.

Nestes exercicios daremos a x o valor de 2; a y , o valor de 3, e a z , o valor de 4.

Problema. Qual é o valor de $x^2 + y^2$?

Solução. Se $x=2$, então $x^2=2 \times 2=4$.
Se $y=3$, então $y^2=3 \times 3=9$. O
valor das duas potências é $4+9=13$.

Operação

$$\begin{aligned} x^2 &= x \times x = 2 \times 2 = 4 \\ y^2 &= y \times y = 3 \times 3 = 9 \\ x^2 + y^2 &= 13 \end{aligned}$$

Achar o valor numérico das seguintes potências:

1. $x^2 + y^2$.	Resp. 17	6. $x + 2y + z^2$.	Resp. ?
2. $x^2 + y^2 - z$.	> 27	7. $3x^2 + 5y + z^2$.	> ?
3. $x^2 - y + z^2$.	> 31	8. $y^2 + z^2 - 5x$.	> ?
4. $x + y^2 + 2z^2$.	> 43	9. $2z^2 + y + x$.	> ?
5. $x^2 - y - z$.	> 9	10. $z + y^2 + z^2$.	> ?

Expressões algébricas

31. Chama-se expressão algébrica uma quantidade representada por meio de símbolos algébricos. Assim, $5a$ é uma expressão algébrica que mostra que a quantidade a deve ser tomada 5 vezes.

$2a + 3b$ é uma expressão algébrica que mostra que 3 vezes a quantidade b , deve ser adicionada a 2 vezes a quantidade a .

$3a^2 - 5ab$ é uma expressão algébrica que mostra que de 3 vezes o quadrado de a , deve subtrair-se 5 vezes a quantidade ab .

32. Monómio é uma quantidade algébrica que não está unida a outra quantidade pelos sinais de somar, subtrahir, igualdade ou desigualdade $+$, $-$, $=$ ou $>$. Assim, $3a$, $2xy$ e abx^2y são monómios.

O monómio é também chamado termo ou quantidade simples.

33. Polynómio é uma quantidade algébrica composta de dois ou mais termos unidos pelos sinais $+$ ou $-$. Assim, $a + b$, $ab - 2x + 5y^2$ são polynómios.

Se um polynómio tem dois termos, chama-se também binómio; se tem tres termos, chama-se também trinómio. Assim, $2a + b$ é um binómio; e $ab - x + y$ é um trinómio.

Nota. Monómio é a expressão algébrica que tem um só termo; binómio é a expressão algébrica que tem dois termos; trinómio é a expressão que tem tres termos, e polynómio, rigorosamente falando, é a expressão algébrica que tem mais de tres termos. Mas, para facilitar os cálculos algébricos, dá-se geralmente o nome de polynómio a toda a expressão que tem mais de um termo.

34. Cada termo de um polynómio deve ser precedido por um dos sinais $+$ ou $-$, exceptua-se, porém, o primeiro termo que, quando é positivo, supprime-se-lhe, por abreviatura, o signal $+$, como $3ax + 2bc - xy$.

25. Se um termo, precedido pelos signaes $+$ ou $-$ é combinado com outras letras pelos signaes \times ou \div , estas letras fazem parte desse termo, e a elle devem ser unidas pela operação indicada. Assim, $4 + 3 \times 6$ quer dizer que ao numero 4 devemos juntar, não 3 sómente, mas o producto de 3 multiplicado por 6, que é $3 \times 6 = 18$; e por isso esta expressão tem só dois termos que são $4 + 18$. Do mesmo modo $a + b \times c$ tem só dois termos que são $a + bc$; $a + a - b + c$ tem só tres termos que são $a + a - b + c$.

Os discipulos reduzirão as seguintes expressões aos seus verdadeiros termos:

1. $50 + 5 \times 2$.	$50 + 10$	7. $4a - 2b + c$.	?
2. $20 - 3 \times 2$.	$20 - 6$	8. $50 + 6 \times ab$.	?
3. $ac + 4b \times 2$.	$ac + 8b$	9. $b - c \times d$.	?
4. $3b - 6b \div 3$.	$5b - \frac{6b}{3}$	10. $ab - 5c + d \times x$.	?
5. $3x - 8y + a$.	$3x - \frac{8y}{2}$	11. $x \times y \times z + ab$.	?
6. $6b + 7c \times x$.	$6b + 7cx$	12. $25 - 10ab + 2$.	?

36. Mudando-se em um polynómio a ordem de seus termos, não se altera o seu valor, conservando cada termo o seu respectivo signal. Assim, a expressão $a + b - c$ é igual a $a - c + b$ ou a $b + a - c$.

Illustração. Se dermos á letra a o valor numerico de 5; á b , o valor de 4, e á c o valor de 3, teremos nas tres expressões resultados iguaes, como vemos na igualdade que está ao lado.

$$\begin{aligned} a + b - c &= 5 + 4 - 3 = 6, \\ a - c + b &= 5 - 3 + 4 = 6, \\ b + a - c &= 4 + 5 - 3 = 6. \end{aligned}$$

37. Quando uma letra não tem expoente, subentende-se sempre o expoente 1; pois a é o mesmo que a^1 ; x é o mesmo que x^1 , e axy^2 é o mesmo que $a^1x^1y^2$.

38. Chama-se grau de um termo a somma dos expoentes das letras que constituem esse termo.

$2a$ é um termo do primeiro grau, porque tem uma só letra, que é a , com o expoente 1.

ax é um termo do segundo grau, porque tem duas letras, que são a e x , cada uma elevada á primeira potencia.

$5axy$ é um termo do terceiro grau.

a^2b^2 é um termo do quarto grau (n. 25).

39. Polynomio homogeneo de grau n

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_ny^n$$

$$a_0x^n + a_1x^{n-1}y + a_2x^{n-2}y^2 + \dots + a_ny^n$$

ou ainda

40. Quantidades semelhantes

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

ser incluidas em um só termo, que é $2abc^2 + 3abc^2 - abc^2 = 4abc^2$

41. Quantidades dessemelhantes

$$a_1x^p y^q + a_2x^r y^s + \dots + a_nx^t y^u$$

42. Um polynomio que tem termos semelhantes, pôde ser reduzido a um só termo, porque dois ou mais termos semelhantes podem ser reduzidos a um só.

Assim, o polynomio $5ab + 2x + 4x$ pode ser reduzido a dois termos

O polynomio $3ac + 2ac + 6ab - 2ab$ pôde tambem ser reduzido a dois termos

43. Razão verdadeira

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

Modo de enunciar as expressões algebricas

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

44. Na adição a conjunção e, enunciaremos a expressão

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

$$a_1x^p y^q + a_2x^p y^q + \dots + a_nx^p y^q$$

ADICÇÃO

45. Na adição algebrica, a operação que tem por fim unir as quantidades algebricas em uma só expressão

47. Na adição algebrica ha tres casos a considerar que são

1. Quando as quantidades são semelhantes e tem os sinais iguaes.

2. Quando as quantidades são semelhantes, mas tem sinais diferentes.

3. Quando as quantidades não são semelhantes.

Na primeira o discipulo recordará os dois pontos

1. Quando as quantidades são semelhantes e tem os sinais iguaes.

2. Quando as quantidades são semelhantes, mas tem sinais diferentes.

49. Quando as quantidades são semelhantes, e tem os sinais iguaes, procede-se justamente como em Arithmetica,

procede-se justamente como em Arithmetica,

Problema. Que é a somma das quantidades 3 a nos, 5 annos, 4 annos e 1 anno?

Solução. A nos são 3 annos, 3a
5 annos, 5a
4 annos, 4a
1 anno, a
18 annos 18a

Operar as seguintes addições:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)	(6.)
3	—	2a	2a	4ab	2a—5
5	—	4a	6b	6ab	5a—3
4	—	8a	8b	6ab	a—8
1	—	18a	17b	12ab	12x—18
	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)	(11.)
	3abx ²	7a—8	8x—5	2a—b	
	3abx ²	5a—3	6x—2	5a—2b	
	2abx ²	a+4	2x—6	a—5b	
	4abx ²	2a+1	8x—	b	
	4abx ²	4a+6	x—2	1b	

4A Uma somma algebrica não é em todos os casos igual a uma somma em Arithmetica, como no caso precedente.

Em Arithmetica, como as quantidades que se addicionam são sempre positivas, a somma deve ser sempre maior do que qualquer das suas parcelas. Assim, na operação $3+4+8=15$, a somma 15 é maior do que qualquer das parcelas 3, 4 ou 8. Em Algebra, porém, como temos de addicionar tambem quantidades negativas, a somma poderá ser alg. mas vezes na l. ou numericamente inferior á somma das quantidades positivas, como vemos ver no caso seguinte.

Segundo caso da addição

50 Quando se addicionam termos de sinais diferentes, isto é, quando umas tem o signal +, e outras tem o signal —, addicionam-se os coefficients dos termos positivos; acha-se a differença das duas sommas, e se a somma maior for negativa dá-se á differença o signal — e junta-se lbe a parte litteral.

Problema. Achar a somma das seguintes quantidades:
4a, 3a e 2a

Solução. A nos são 4a, 3a e 2a
4a + 3a + 2a = 9a

Deve-se fazer:

51 Quando se addicionam termos de sinais diferentes, a somma não é em todos os casos igual a uma somma em Arithmetica, como no caso precedente. Em Arithmetica, como as quantidades que se addicionam são sempre positivas, a somma deve ser sempre maior do que qualquer das suas parcelas. Assim, na operação $3+4+8=15$, a somma 15 é maior do que qualquer das parcelas 3, 4 ou 8. Em Algebra, porém, como temos de addicionar tambem quantidades negativas, a somma poderá ser alg. mas vezes na l. ou numericamente inferior á somma das quantidades positivas, como vemos ver no caso seguinte.

52 Quando se addicionam termos de sinais diferentes, isto é, quando umas tem o signal +, e outras tem o signal —, addicionam-se os coefficients dos termos positivos; acha-se a differença das duas sommas, e se a somma maior for negativa dá-se á differença o signal — e junta-se lbe a parte litteral.

Problema. Sommar as seguintes quantidades:
—3a, 10a + 2a e —6a.

Solução. A nos são —3a, 10a + 2a e —6a
—3a + 10a + 2a — 6a = 3a

Deve-se fazer:

obtemos esta somma, fixamos

temos com $10+30+20=60$ e retiramos $100+60=160$, se então tivermos

os fundos que tinhamos no cofre mas com ella tirou 160, isto é mais do que poz, o resultado será -60 , isto é ficará um destaque de 60. Portanto a somma de $-5a+3b-10a+2a-6a=6a$.

Realizar as seguintes addições

	(3.)	(4.)	(5.)
	$+3a$	$+5abx$	$ab+8$
	$+10a$	$-3abx$	$3ab+1$
	$-12a$	abx	$-2ab+5$
	$6a$	$-5abx$	$9ab+10$
	$2a$	$+2abx$	$-3ab+7$
	$-3a$	$-2abx$	$5ab-9$

	(8.)	(9.)	(10.)
	$3ab-6$	$a+b$	$a+b+2c$
	$-2ab-7$	$-a+b$	$-a+b+3c$
	$-6ab+2$	$3a-2b$	$3a-b+3c$
	$5ab+1$	$-a+3b$	$-a+3b+c$

11. Qual é a somma de $8a$ e $-5a$?
12. Qual é a somma de $5a$ e $-8a$?
13. Qual é a somma de $-7ax$, $3ax$, $6ax$,
14. Qual é a somma de $4xy$, $2xy$, e $-6x$
15. Adicionar $4ac$, $3ac$, $7ac$, $-6ac$, $-2ac$, $9ac$, e $-17ac$.

Resp. $2ac$.

16. Adicionar $7a$, $5b$, $2a+3b$, $-7a-8b$ e $a+9b$.

Resp. $a+b$.

17. Achar a somma de $8ax$, $2by$, $-2ax+5by$, $3ax-4by$ e $-9ax+8by$.

Resp. $5by$.

18. Achar a somma de $3ab-10c$, $-3ab+7x$, $3ab-6x$, $-ab+2x$ e $-2ab+7x$

Resp. 0 .

Terceiro caso de addição

63. Quando alguns dos termos não são semelhantes, em-se em columna os termos semelhantes, e os dessemelhantes escrevem-se adiante, e depois procede-se como nos precedentes.

Problema. Quanto sommam 2 centos, mais 3 centos e mais 4 dúzias?

Solução. Como 2 centos e 3 centos são quantidades semelhantes, escrevem-se em columna para sommar. 4 dúzias é uma quantidade dessemelhante, es-

crevem-se adiante. Se em lugar de escrevermos as palavras, escrevemos os números, o resultado será o mesmo, pois $2c+3c+4d=5c+4d$.

2 centos
3 centos + 4 dúzias
5 centos + 4 dúzias

$$\begin{array}{r} 2c \\ 3c \\ 5c+4d \end{array}$$

Regra geral para a addição. Escrevem-se os termos semelhantes em columnas, e adiante delles, os termos dessemelhantes com os seus respectivos signaes, adicionam-se os termos semelhantes que forem positivos, depois os que forem negativos, e a cada uma das columnas escreve-se o resultado da columna respectiva com o signal da somma maior e com o signal da columna menor. Os termos dessemelhantes com os seus respectivos signaes.

Operar as seguintes addições

(1.)	(2.)	(3.)
$4a+5b-7c$	$3b+4x+y^2$	$5a+xy+m$
$9a-2b+c$	$b-6x+4y^2$	$-6a+8xy-8m$
$-a+3b+4c$	$-4b+9x+8y^2$	$7a-9xy+9m$
$15a+5b+2c$		

(1.)

$$\begin{array}{r} -9y+5z+3-g \\ -x-3y-8-g \\ -x+y-3x+1+7g \\ -2x+5y+3z-1-g \end{array}$$

(5.)

$$\begin{array}{r} 8a+b \\ 2a-b+c \\ -3a+b+2d \\ -6b-3c+3d \end{array}$$

6. $6a+10+3b-2a-5b$. Resp. $4a-2b+10$.
7. $2ab+c$, $4ax-2$, $2ax$, $3ab+3c-x$. Resp. $8ab+2ax+2c+12x$.
8. $140+x$, $13b-y$, $-11a+2y$, $-2a$, $12b+5$. Resp. $a+b+x+y+5$.
9. $-7b+3c$, $4b-2c+3x$, $3b-3c-2c-2x$. Resp. x .
10. $a-3b+4c$, $5d$, $3b$, $5c+6d-2a$, $5a-7d+4a-3b-5a+4b-3c$. Resp. $2a+3b+c+d$.
11. x^2-5x^2+6x-2 , $3x^2-6x^2-15x+4$, x^2-8x^2-6x+4 . Resp. $6x^2-19x^2-15x+8$.

Adicionam-se depois o minuendo e o subtraendo segundo a regra da adição algébrica, e o resultado será o resto da subtração.

Nota. A regra ficará perfeitamente compreendida, operando o seguinte exemplo por subtração e depois por adição subtraendo, conforme se a apresentando na regra.

Minuendo	Subtração	Adição
5a + 3b - c	5a + 3b - c	5a + 3b - c
3a - 2b + 2c	3a - 2b + 2c	3a - 2b + 2c
2a + 5b - 3c		

Operar nas seguintes subtrações

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
$8 - 5$	$3ax - 2y$	$4cx^2 - 3by^2$	$8xyz + 3ax - 8$
$2 + 3$	$2ax + 3y$	$2cx^2 + 3by^2$	$5xyz - 3ax + 8$
$10 - 8$	$ax - by$	$2cx^2$	$3xyz + 6ax - 16$
(5.)	(6.)	(7.)	(8.)
$7x + 4y$	$3a - 2b$	$6ax - 4y^2 + 3$	$5a + 2x - 2y$
$6x + y$	$3a - 3b$	$3ax - 6y^2 + 2$	$2a + x - 4y - 2$

9. De 14 subtrahir $ab - 5$.	Resp.	19 - d
10. De $a + b$ subtrahir a .	"	1
11. De a subtrahir $a + b$.	"	1
12. De x subtrahir $x - 6$.	"	6
13. De $3ax$ subtrahir $2ax + 7$.	"	$ax - 7$
14. De $x + y$ subtrahir $x - y$.	"	2y
15. De $x - y$ subtrahir $y + x$.	"	2y
16. De $x - y$ subtrahir $y - x$.	"	2x
17. De $x + y + z$ subtrahir $x - y - z$.	"	2y
18. De $5x + 3y - z$ subtrahir $4x + 3y$.	"	$x - z$
19. De a subtrahir $-a$.	"	2a
20. De $8a$ subtrahir $-3a$.	"	11a
21. De $5b$ subtrahir $+11b$.	"	6b
22. De $3a$ subtrahir $-2b$.	"	$3a + 2b$
23. De $8a$ subtrahir $3a$.	"	5a
24. De $a - b$ subtrahir a .	"	-b
25. De $a - b$ subtrahir $-b$.	"	1 - b
26. De $a - b$ subtrahir $-a$.	"	2a - b
27. De $12a - 3b$ subtrahir $5a$.	"	7a - 3b
28. De 14 subtrahir 1 .	"	13
29. De $a^2 - b^2$ subtrahir $a^2 - 2ab + b^2$.	"	$2ab - 2b^2$

30. De $32a + 3b$ subtrahir $5a - 17b$.	Resp.	$27a - 14b$.
31. De $5(x + y)$ subtrahir $2(x + y)$.	"	$3(x + y)$.
32. De $3a(x - z)$ subtrahir $a(x - z)$.	"	$2a(x - z)$.
33. De $13a - 2b + 9c - 3d$ subtrahir $8a - 4b + 9c - 10d$.	"	$5a + 4b + 7d$.

Aplicação do parenthesis na adição e na subtração

61. Pelo que acabamos de expôr nas operações da adição e subtração, fica evidente que os signaes $+$ e $-$ têm duas significações muito distintas, que são:

1. Indicar simplesmente as operações de adição e subtração

2. Mostrar a natureza positiva ou negativa das quantidades

62. Se subtrahirmos a quantidade b da quantidade a , o resultado será $a - b$, neste exemplo, o signal $-$ simplesmente indica a operação de subtrahir, pois, está subentendido que os dois termos da subtração são de natureza positiva, porque a expressão completa seria $+a - +b$.

Se, porém, da quantidade positiva a subtrahirmos a quantidade negativa $-b$, a expressão completa seria $+a - -b$. Nesta expressão fica claro que o primeiro signal $-$ indica simplesmente uma subtração, e o segundo signal $-$ mostra a natureza negativa da quantidade $-b$. Ora como a repetição de dois signaes iguaes pôde trazer confusão, em preza se o parenthesis () para se escrever com clareza as expressões algébricas, e assim temos $a - (-b)$.

63. Quando duas ou mais quantidades são consideradas como um só termo, fecham-se com um parenthesis, para serem tomadas neste sentido. Assim, a expressão $10 - (6 + 2)$ mostra que de 10 temos de subtrahir $6 + 2$, isto é, 8. Se tirassemos o parenthesis, a expressão seria $10 - 6 + 2$, isto é, mostrava que de 10 deveríamos tirar 6, e ao resto juntar 2, o que daria um resultado differente do primeiro; precisamos, pois, saber tirar o parenthesis de uma expressão algébrica sem lhe alterar o valor.

64. Os dois principios seguintes nos esclarecerão perfeitamente neste ponto.

1. Quando uma expressão algébrica fechada por um parenthesis é precedida pelo signal $+$, pôde-se tirar o parenthesis sem se alterar o valor da expressão.

MULTIPLICAÇÃO

quantidade que se multiplica, chama-se **multiplicando**, e o resultado da operação chama-se **produto**.

factores do producto,

$$\begin{array}{r} 25 \times 3 = 75 \\ 25 \times 4 = 100 \\ 25 \times 5 = 125 \\ 25 \times 6 = 150 \\ 25 \times 7 = 175 \\ 25 \times 8 = 200 \\ 25 \times 9 = 225 \\ 25 \times 10 = 250 \end{array}$$

deste principio que o producto de $a \times a \times 3$, de $3 \times a$ e a é o mesmo, e como se escreve

Na multiplicação, os factores são os que são

- 1.º Quando os dois factores são monomios.
- 2.º Quando um factor é polynomio e o outro monomio.
- 3.º Quando ambos os factores são polynomios.

Primeiro caso da multiplicação

69. Para encontrar o producto de dois monomios, o que o discípulo saiba operar com quatro dados que são:

- | | |
|-----------------------|-----------------|
| 1.º O coefficiente. | 3.º O expoente. |
| 2.º A parte litteral. | 4.º O signal. |

70. O coefficiente e a parte litteral. Para achar a regra para achar o coefficiente e a parte litteral do producto resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o producto de $2a$ multiplicado por $3b$?

Operação	
$2a \times 3b$	$2 \times 3 = 6$
$a \times b$	$a \times b = ab$
Produto	$6ab$

De

Exemplo

$$a + b - c = 5 + 4 - 3 = 6.$$

De

Se o signal for igual +, pela regra exposta no n.º 60.

$$a - (b - c) = 5 - (4 - 3) = 4.$$

66. Para encontrar o producto de dois polynomios, o que o discípulo saiba operar com quatro dados que são:

$a - b - c + d$, e sem a parenthesis ficará $a - b - c + d$

primir um polynomio por diversas formas sem alterarmos o seu valor

1	$a - b - c + d$	1	$a - b - c + d$
2	$a - b - c + d$	2	$a - b - c + d$
3	$a - b - c + d$	3	$a - b - c + d$
4	$a - b - c + d$	4	$a - b - c + d$
5	$a - b - c + d$	5	$a - b - c + d$
6	$a - b - c + d$	6	$a - b - c + d$
7	$a - b - c + d$	7	$a - b - c + d$
8	$a - b - c + d$	8	$a - b - c + d$
9	$a - b - c + d$	9	$a - b - c + d$
10	$a - b - c + d$	10	$a - b - c + d$

Regra. Para se obter o coeficiente e a parte literal de um produto, multipliquem-se entre si os coeficientes e as partes literais, juntam-se todas as letras dos dois factores na ordem alfabética.

Exemplos para resolver:

	(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
Multiplicando	3a	4ab	15ac	19abc
Multiplicador	2y	8cd	x	5dx
Produto	6ay	32abd	15acx	95abcdx

	(5.)	(6.)	(7.)	(8.)	(9.)
Divisor	20xy	18ax	25xx	15xy	
Dividendo	7b	10a	18by	y	8ad

71. O expoente. Para determinarmos a regra do expoente, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o produto de $3a^2$ multiplicado por $4a^3$?

Solução. Multiplicando os coeficientes, temos 12; multiplicando as partes literais, temos $a^2 \times a^3 = a^5$. O produto é pois $12a^5$.

Demonstração. Desde que $3a^2$ seja, e $4a^3$ seja, multiplicando-os, o produto de $3a^2 \times 4a^3$ é $12a^5$, ora, como cada um dos factores a^2 e a^3 contém 5 a 's, segue-se que o produto é $12a^5$. Portanto.

Regra. O expoente de uma letra no produto é igual à soma dos expoentes da mesma letra nos dois factores.

Exemplos para resolver

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
3b	4ab	7ab ³	18ab	20x ³
5b	a	5ab	5b ² a	5a ⁴ x ²
15b ²	4a ² b	35a ² b ⁴	90ab ³ a	100a ⁴ x ⁵

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
12b ³	18ab ⁴	18a ² b ²	20a ³ y	7ab ³
b	6a ² b	5ab ³	8a ² y	9a ² b ³ d

Nota. Quando a soma dos factores da multiplicação são potências da mesma letra, podemos obter o produto sem a multiplicação. Assim, $a^2 \times a^3 = a^{2+3} = a^5$, $x^2 \times x = x^{2+1} = x^3$, $a^3 \times a^2 \times a^4 = a^{3+2+4} = a^9$.

72. Os sinais. Investigando as leis que regem os sinais do produto, temos o resultado seguinte:

Se os sinais dos dois factores forem iguaes, o signal do producto será positivo; mas se forem desiguaes, o signal do producto será negativo. Isto quer dizer que

+ multiplicado por + dá +,
 - multiplicado por - dá +,
 + multiplicado por - dá -,
 - multiplicado por + dá -.

Demonstração. Para podermos comprehender a razão deste resultado, analysar-emos em certos casos separadamente.

Primeiro caso. Qual é o producto de + a multiplicado por + 4?

Análise. A quantidade + a tomada uma vez é + a, tomada duas vezes é + 2a; tomada tres vezes é + 3a e tomada quatro vezes é + 4a. Ora, como o multiplicador é positivo, mostra que o producto é + 4a. Enacar no calculo de que esta multiplicação faz parte, com uma quantidade additiva, e por isso deve levar o signal +. Logo o producto de + a \times (+ 4) = + 4a. Logo, o producto de duas quantidades positivas é positivo.

Segundo caso. Qual é o producto de - a multiplicado por - 4?

Análise. A quantidade - a tomada uma vez é - a, tomada duas vezes é - 2a; tomada tres vezes é - 3a e tomada quatro vezes é - 4a. Ora, como o signal do multiplicador é -, mostra que o producto é + 4a. Enacar no calculo de que esta multiplicação faz parte, com uma quantidade subtractiva, e por isso deve levar o signal -. Logo o producto de - a \times (- 4) = + 4a. Logo, o producto de duas quantidades negativas é positivo.

Terceiro caso. Qual é o producto de + a multiplicado por - 4?

Análise. Já vimos no primeiro caso que a quantidade + a tomada quatro vezes é + 4a. Ora, como o signal do multiplicador é -, mostra que o producto é - 4a. Enacar no calculo de que esta multiplicação faz parte, com uma quantidade subtractiva, e por isso deve levar o signal -. Logo o producto de + a \times (- 4) = - 4a. Logo, o producto de uma quantidade positiva multiplicada por uma negativa, dá um producto negativo.

Quarto caso. Qual é o producto de - a multiplicado por + 4?

Análise. A quantidade - a tomada uma vez é - a; tomada duas vezes é - 2a; tomada tres vezes é - 3a e tomada quatro vezes é - 4a. Ora, como o signal do multiplicador é +, mostra que o producto é - 4a. Enacar no calculo de que esta multiplicação faz parte, com uma quantidade subtractiva, e por isso o producto deve levar o signal -. Logo o producto de - a \times (+ 4) = - 4a. Logo, uma quantidade negativa multiplicada por uma positiva, dá um producto negativo.

73. Nestas quatro analyses estabelecemos a seguinte regra dos sinais:

Regra. O producto de signaes iguaes leva o signal +, e

Exercícios para resolver.

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
Multiplicar $+5a$	$-3x$	$+5ab$	$-12y$
Multiplicador $+2a$	$+x$	$-3bc$	$-5x$
Producto $+10ab$	$-3x^2$	$-15abc$	$+60xy$

(5.)	(6.)	(7.)	(8.)	(9.)
$+3a^2$	$-8ab$	$+16bx$	-2^2x	$+16abc$
$+5a$	$+9ac$	$-6a$	$-8y^2$	$-12ax$

Segundo caso da multiplicação

74. Quando o multiplicando é um polynomio, multiplique-o pelo multiplicador termo por termo, e a somma das signaes

Problema. Qual é o producto de $a-b$ multiplicado por b ?

Solução. Multiplicando cada termo do multiplicando pelo multiplicador, temos $a \times b = ab$, e $-b \times b = -b^2$. Logo o producto é $ab - b^2$. Quando o multiplicando tem o signal + e o multiplicador o signal -, o producto é negativo. Quando o multiplicando tem o signal - e o multiplicador o signal +, o producto é negativo. Quando o multiplicando tem o signal - e o multiplicador o signal -, o producto é positivo.

Demonstração. Pode-se ver esta demonstração a seguir, da exactidão do producto, dando-lhe a quantidade o valor de 5 e o valor de 2. Multiplicando $5 - 2$ por 2 temos o pro-

Operação

$$\begin{array}{r} a-b \\ \times b \\ \hline ab-b^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5-2 \\ \times 2 \\ \hline 10-4 \end{array}$$

Exercícios para resolver:

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)
$ab+cd$	ba	ad	$2a-b$
ac	ab	$-x$	$+b-5$
a^2bc+ac^2d	ab^2c	$-2ax+bx$	$2a$
	a^2bd		$2a^2+2ab-10a$

Multiplicar $a+d$ por b .	Resp.	$ab+bd$
Multiplicar $ac+bc$ por d .		$acd+bcd$
Multiplicar $4x+5y$ por $3x$.		$12x^2+15xy$
Multiplicar $2x+3y$ por $4bx+6by$.		$8bx^2+18bxy$
Multiplicar $m+2a$ por $-3n$.		$-3mn-6an$
Multiplicar $x+y$ por ax .		ax^2+axy
Multiplicar $2a+2b-3c$ por a .		$2a^2+2ab-3ac$
Multiplicar $ab+ax+xy+b$ por $2a$.		$2a^2b+2a^2x+2axy+2ab$

Terceiro caso da multiplicação

75. Quando ambos os factores são polynomios, opera-se seguinte modo:

Problema. Qual é o producto de $a+b$ multiplicado por

Operação

$$\begin{array}{r} a+b \\ \times a+b \\ \hline a^2+ab \\ ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Regra geral. Multiplicando cada termo do multiplicando pelo multiplicador conforme a regra dos coefficients, parte litteral, exponentes e signaes, e a somma algébrica de todos os productos parciaes será o producto total.

Operar as seguintes multiplicações

(1.)	(2.)
$a^2+2ab+b^2$	$3a^2b+a^2b$
$a+2a^2+ab^2$	$12a^2$
$a^2+3a^2b+3ab^2+b^2$	$16b^2$

8 Multiplicar $a-b$ por $x-y$.	Resp.	$ax-ay-bx+by$
9 Multiplicar $a-b$ por $a-b$.		$a^2-2ab+b^2$
10 Multiplicar $a-b$ por $a+b$.		a^2-b^2
11 Multiplicar $a+ac+c^2$ por $a-c$.		
12 Multiplicar $m+n$ por $m-n$.		
13 Multiplicar y^2-y+1 por $y+1$.		
14 Multiplicar x^2+y por x^2-y^2 .		

10. Multiplicar $a - 3a + 8$ por $a + 9$.
 11. Multiplicar $3a + 5b$ por $3a - 5b$.
 12. Multiplicar $a^2 - ab + b^2$ por $a + b$.
 13. Multiplicar $d - bx$ por $d + bx$.
 14. Multiplicar $3a^2 + x$ por $2a^2 + 4x$.

Uso do parenthesis na multiplicação

76. Se um parenthesis está unido ao signal \times , mostra que cada termo do parenthesis tem de ser multiplicado pelo termo a que se segue. Assim, a expressão $(a+b-c) \times 2a$ mostra que os termos a , b e c tem de ser multiplicados por $2a$ e para tirarmos a parenthesis desta expressão sem lhe alterarmos o valor, é necessario operar a multiplicação e a expressão se transformará em $2a^2 + 2ab - 2ac$.

77. Quando entre dois parenthesis está o signal \times , mostra que a quantidade contida no primeiro parenthesis deve ser multiplicada pela quantidade contida no segundo. Assim, a expressão $(a+x) \times (a-x)$ mostra que $a+x$ deve ser multiplicado por $a-x$ e o resultado desta expressão será $a^2 - x^2$.

Nota.	$(a+b-c) \times 2a$	$2a \times (a+b-c)$
Resp.	$2a^2 + 2ab - 2ac$	$2a^2 + 2ab - 2ac$

Tirar o parenthesis das seguintes expressões sem lhes alterar o valor

- | | |
|--------------------------------|---------------------|
| 1. $ab(a-b)$. | Resp. $a^2b + ab^2$ |
| 2. $a(x-y)$. | $ax - ay$ |
| 3. $(x+y)(x-y)$. | $x^2 + 2xy + y^2$ |
| 4. $(a-b)(a+b)$. | $a^2 - b^2$ |
| 5. $6+3+3-12)x$. | $2x$ |
| 6. $3x(a+ab-x)$. | $3ax + 3abx - 3x^2$ |
| 7. $abc(a-ac)$. | $a^2bc - a^2bc^2$ |
| 8. $(ab+cd)(ab-cd)$. | $a^2b^2 - c^2d^2$ |
| 9. $(a+b)(a+b) + (a-b)(a-b)$. | $2a^2 + 2b^2$ |
| 10. $(5+3a)2a$. | $?$ |
| 11. $(x+3y)5$. | $?$ |
| 12. $2x(5x-3y)$. | $?$ |
| 13. $xy(a+b-3)$. | $?$ |
| 14. $(a+b)(a+b)$. | $?$ |
| 15. $(a+2b)(2-a)$. | $?$ |
| 16. $2ab(x+y+z)$. | $?$ |

78. Quando se faz $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$, isto é, o producto de um polynomio multiplicado por si mesmo, fecha-se o polynomio com um parenthesis e dá-se o expoente 2, quando se quer indicar o seu cubo. Já se o expoente 3; quando se quer indicar a quarta potencia, lhe o expoente 4, e assim por diante. De sorte que,
- $(a+b)(a+b)$ ou $a^2 + 2ab + b^2$
 $(a+b)(a+b)(a+b)$ ou $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
 $(a+b)(a+b)(a+b)(a+b)$ ou $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

Achar o resultado das seguintes expressões

- | | |
|------------------|--------------------------|
| 18. $(2a+y)^2$ | Resp. $4a^2 + 4ay + y^2$ |
| 19. $(x-3)^2$ | $x^2 - 6x + 9$ |
| 20. $(4a+5b)^2$ | $?$ |
| 21. $(a+b-2c)^2$ | $?$ |
| 22. $(d-4)^2$ | $?$ |

DIVISÃO

79. Divisão em Algebra é a operação que tem por fim achar quantas vezes uma quantidade algebraica contém outra.

A quantidade que se divide, chama-se **dividendo**.

A quantidade pela qual se divide o dividendo, chama-se **divisor**.

O resultado da operação chama-se **quociente**.

A divisão é o inverso da multiplicação, e por isso, multiplicando o quociente pelo divisor, obtemos o dividendo.

A divisão indica-se escrevendo o divisor debaixo do dividendo em forma de fracção. Assim para indicarmos que ab deve ser dividido por a , escreveremos $\frac{ab}{a}$. Também se pôde

indicar a divisão como em Arithmetica, escrevendo o divisor á direita do dividendo, como: $ab \overline{) a}$.

Na divisão ha tres casos a considerar, que são:

1. Dividir um monomio por outro monomio.
2. Dividir um polynomio por um monomio.
3. Dividir um polynomio por outro polynomio.

Primeiro caso da divisão

80. Na divisão, assim como na multiplicação, é necessario que o discipulo saiba, em qualquer caso, operar com os quatro dados seguintes:

- | | |
|-----------------------|-----------------|
| 1.º O coefficiente | 3.º O expoente. |
| 2.º A parte litteral. | 4.º O signal. |

§1 O coefficiente e a parte litteral. Para determinarmos a regra para se achar o coefficiente e a parte litteral do quociente, resolveremos os seguintes problemas:

I Problema. Qual é o quociente de $6ab$ dividido por 2 ?

Solução. De $6ab$ quantas vezes 2 é div.? Esta quantidade está em duas partes, uma é o mesmo o quociente $3ab$. Mas, como agora o divisor não o quociente, temos $2 \times 3ab = 6ab$ que se tirando de $6ab$ não deixa resto.

Operação

$$\begin{array}{r} 6ab : 2 \\ 6ab \quad 3ab \\ \hline 0 \end{array}$$

II Problema. Qual é o quociente de $6ab$ dividido por $3ab$?

Operação

Solução. Em $6ab$ quantas vezes há $3ab$? Há 2 vezes, porque 2 vezes $3ab$ são $6ab$, então o quociente é 2.

$$\begin{array}{r} 6ab : 3ab \\ 6ab \quad 2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Regra. Divide-se o coefficiente do dividendo pelo coefficiente do divisor, e o resultado se multiplica pela parte litteral do dividendo que não estiver no divisor, de sorte que, multiplicando o divisor pela quociente de o dividendo.

Querer os seguintes exemplos

(1.)	(2.)	(3.)	(4.)	(5.)
$6a : 6 = a$	$ab : a = b$	$3ab : 3a = b$	$abx : x = ab$	$8aby : 2ay = 4b$
$6a : a = 6$	$ab : b = a$	$3ab : 3b = a$	$abx : ab = x$	$8aby : 4b = 2ay$
0	0	0	0	0

(6.)	(7.)	(8.)	(9.)	(10.)
$18abc : 3 = 6abc$	$18abc : 6ab = 3c$	$25xyz : 5x = 5yz$	$21abcd : 7c = 3abd$	

§2 O expoente. Para estabelecermos a regra para achar o expoente do quociente, resolveremos o seguinte problema:

Problema. Qual é o quociente de $6a^2$ dividido por 2 ?

Operação

$$6a^2 : 2 = 3a^2$$

Demonstração. O $6a^2$ sendo $6a^2$ é $6a \times a$, e o divisor $2a^2$, igual a $2a \times a$, de modo que entra 3 vezes o divisor no dividendo.

Se tirarmos $2a^2$ de $6a^2$, resta $4a^2$, tiramos outra vez $2a^2$ e resta $2a^2$, tiramos mais uma vez $2a^2$ e resta 0 . Logo o quociente é $3a^2$.

Regra. Do expoente de uma letra no dividendo subtrahindo o expoente da mesma letra no divisor, o resto será o expoente dessa letra no quociente.

Nota. Quando o dividendo e o divisor são as potências da mesma letra, pôde-se operar só com o expoente. Assim, $x^3 : x^2 = x^{3-2} = x^1 = x$.

1.)	2.)	3.)	4.)
$6a^3 : 2a^2 = 3a$	$12a^3b^2 : 4a^2b = 3ab$	$6xy^3 : 2xy^2 = 3y$	$3y^3 : y^2 = 3y$
5.)	(6.)	(7.)	(8.)
$x^3 : x^2 = x$	$y^4 : y^2 = y^2$	$a^7 : a^5 = a^2$	$x^{12} : x^4 = x^8$
(9.)	(10.)	(11.)	(12.)
$16xy^3 : 4xy^2 = 4y$	$14xy^3 : 7 = 2xy^3$	$24abc^2 : 8ac = 3bc^2$	$7x^3y^2 : xy = 7x^2y$

§3 Os signaes. A regra para os signaes na divisão é a mesma que na multiplicação. Se os dois termos da divisão tiverem signaes iguaes, o quociente será positivo; se tiverem signaes diferentes, o quociente será negativo.

Demonstração. Demonstra-se este resultado com a propria regra dos signaes na multiplicação. pois se os signaes de dois factores de uma multiplicação produzem o signal de producto, claro está que o signal do producto dividido por um dos factores, dará o signal do outro factor. De sorte que, sendo

$+$	$+$	$=$	$+$	$+$	$=$	$+$
$+$	$-$	$=$	$-$	$+$	$=$	$-$
$-$	$+$	$=$	$-$	$-$	$=$	$+$
$-$	$-$	$=$	$+$	$-$	$=$	$-$

Problema. Qual é o quociente de $-18abc$ dividido por $+6b^2$?

Solução. $18abc$ dividido por $6b$, o quociente é $3ac$. Como o sinal do dividendo é $-$ e o sinal do divisor é $+$, segue-se que o sinal do quociente deve ser $-$ para dar o dividendo. Então o quociente é $-3ac$, porque $-6b^2 \times (-3ac)$ dá $-18abc$.

$$\begin{array}{r} \text{Operação} \\ 18abc \div +6b^2 \\ -18abc \quad -3ac \\ \hline 0 \end{array}$$

Regra. Se o dividendo e o divisor tiverem sinais iguais, o quociente terá o sinal $+$; se tiverem sinais diferentes, o quociente terá o sinal $-$.

Operar as seguintes divisões:

$$\begin{array}{lll} 1.) & (2.) & (3.) \\ \begin{array}{r} +15ax - 3x \\ +15ax - 5a \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{r} -32abc \div -4ab \\ -32abc \quad +8c \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{r} +21xy^2 \div +7y \\ +21xy^2 \quad +3xy \\ \hline 0 \end{array} \\ 4.) & (5.) & (6.) \\ \begin{array}{r} -27xyz \div 9x \\ -27xyz \quad +9z \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{r} 33ba \div -11c \\ 33ba \quad -11c \\ \hline 0 \end{array} & \begin{array}{r} +18a^2b^4 \div 9a^2 \\ +18a^2b^4 \quad -9a^2 \\ \hline 0 \end{array} \end{array}$$

84. Em todos os exemplos que temos dado na divisão de monômios, o dividendo é exactamente divisível pelo divisor. Mas, porém, há casos em que um monômio não pôde ser exactamente dividido por outro monômio. Estes três casos são:

1.º Quando o coeficiente do dividendo não é exactamente divisível pelo coeficiente do divisor.

2.º Quando a mesma letra tem um expoente maior no divisor que no dividendo.

3.º Quando o divisor tem uma ou mais letras que não se acham no dividendo.

Em qualquer destes casos, indica-se a divisão escrevendo o divisor de baixo do dividendo, em forma de fracção, e o quociente será então um monômio fraccionário, que pode ser simplificado, se o dividendo e o divisor tiverem algum factor ou divisor comum.

Antes, porém, de entrarmos neste processo, precisamos saber o que quer dizer em Algebra a palavra cancelar.

85. A palavra cancelar significa passar um traço ou risco sobre um algarismo ou letra para simplificar ou reduzir o seu valor, como $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}$.

O cancelamento tem muita applicação em Algebra e Arithmetica; no problema seguinte temos um exemplo.

Problema. Qual é o quociente de $15ax$ dividido por $3x^2y$?

Solução. Por três razões o $15ax$ não pode ser dividido por $3x^2y$. Primeira, o coeficiente 15 não se divide pelo coeficiente 3. Segunda, a letra x do divisor é de maior ordem do que a letra x do dividendo. Terceira, porque a letra y se acha no divisor e não se acha no dividendo. A divisão será então indicada escrevendo:

$$\begin{array}{r} \text{Operação} \\ 15ax \div 3x^2y = \frac{3 \times 5 \times a \times x}{3 \times x \times x \times y} = \frac{5a}{xy} \end{array}$$

2.º opera-se a simplificação dos coeficientes ficando

$\frac{5ax}{x^2y}$. Como a letra x é comum a ambos os termos, cancela-se no dividendo e no divisor e fica ficará reduzida de x^2 ou $x \times x$ para x . A simplificação será $\frac{5a}{xy}$.

Demonstração. O dividendo $15ax$ é composto de $3 \times 5 \times a \times x$ e o divisor $3x^2y$ é composto de $3 \times x \times x \times y$. Ora, cancelando-se o mesmo factor no dividendo e no divisor não se altera o valor do quociente (Arith. Progressiva n.º 108). Então cancelando-se os factores 3 e x comuns ao dividendo e ao divisor teremos o quociente reduzido a $\frac{5a}{xy}$.

Este processo é uma simples redução de uma fracção algebraica a outra.

1. Dividir $6amx$ por $3a^2$.

$\frac{2mx}{a}$

2. Dividir $40a^2b^4$ por $16a^3b$.

$\frac{5b^3}{a}$

3. Dividir $18a^2b$ por $12a^4b^4$.

$\frac{3}{4a^2b^3}$

4. Dividir $28a^2b^4c^2$ por $14ab^2c^3$.

$\frac{2ac}{b}$

5. Dividir $100a^2b^3x$ por $4a$.

$25b^3x$

6.º Dividir $121a^3b^2c^3$ por $11b^3$.

$\frac{11a^3c^3}{b}$

86. Nos exemplos que demos para ensinar as regras dos coeficientes, parte literal, expoentes e signaes, escrevemos sempre o divisor á direita do dividendo, por tres motivos:

1.º Porque a divisão ficando semelhante á da Arithmetica, pôde ser comprehendida mais facilmente.

2.º Porque o discipulo operando a divisão, vê logo que o divisor multiplicado pelo quociente dá exactamente o dividendo, o que é importante conhecer praticamente.

3.ª Porque para operar a divisão por cancelamento, a

87

fazeres com os termos de um polinômio, não altera o seu valor. Assim, $a+b$ é igual a $b+a$; do mesmo modo x^2+xy é igual a $xy+x^2$. Há, portanto, certa conveniência em escrever os termos de um polinômio em certa ordem para facilitar a divisão e outros processos algébricos.

Segundo caso da divisão

88. A divisão de um polinômio por um monômio opera-se do seguinte modo:

Problema. Dividir $ab+ac+ad$ por a

Solução. Dividindo que é factor a primeira

$$ab+ac+ad \text{ por } a$$

tem-se:

$$b+c+d$$

Resposta. Divide-se cada termo do dividendo pelo divisor, e os resultados se somam.

Exercícios

Operar os seguintes exemplos

1. Dividir $6x+12y$ por 3
2. Dividir $15a+20b$ por 5
3. Dividir $21a+35b$ por 7
4. Dividir $6ax+9ay$ por 3a
5. Dividir $ab+ac$ por a
6. Dividir $ab+ac$ por ac
7. Dividir $12ax+8ay$ por 4a
8. Dividir $10ax+15ay$ por 5a
9. Dividir $27a+18b$ por 9a
10. Dividir a^2b+2a^2x por a^2b
11. Dividir $3a^2b+21a^2c$ por $3a^2b$
12. Dividir $15a^2b+4y^2$ por $4y^2$
13. Dividir $3ab+15a^2b-27a^3b$ por 3ab
14. Dividir $4a-20a^2+3ab$ por 4a

Resposta.

1. $2x+4y$
2. $3a+4b$
3. $3a+5b$
4. $2x+3y$
5. $b+c$
6. $b+c$
7. $3y+2a$
8. $2x+3y$
9. $3b+2a$
10. $b+2x$
11. $b+7c$
12. $\frac{15a^2b}{4y^2} + 1$
13. $1+5a-9a^2$
14. $1-5a+\frac{3b}{4a}$

Terceiro caso da divisão

89. Para operarmos o terceiro caso da divisão algébrica, convenientemente sahermos ordenar um polinômio

Já vimos no n.º 36 que a ordem em que escrevemos os termos de um polinômio, não altera o seu valor. Assim, $a+b$ é igual a $b+a$; do mesmo modo x^2+xy é igual a $xy+x^2$. Há, portanto, certa conveniência em escrever os termos de um polinômio em certa ordem para facilitar a divisão e outros processos algébricos.

90. Ordenar um polinômio é pois escrever todos os seus termos de modo que os expoentes de uma letra vão constantemente crescendo ou decrescendo. O polinômio diz-se então, ordenado segundo as potências crescentes ou decrescentes de uma letra que se chama letra ordenadora.

Para ordenar, por exemplo, o polinômio $23a^3b+5b^2+6a^2$, segundo as potências decrescentes de a, tem-se o termo que tem a mais alta potência de a, é depois, em ordem decrescente, as outras potências de a, e leremos $23a^3b+6a^2+5b^2$. O expoente 3 decresce até desaparecer.

91. Para se operar uma divisão de polinômios é conveniente ordenar também o divisor, isto é, escrever o de modo que o primeiro termo do dividendo seja exactamente dividido pelo primeiro termo do divisor, para assim facilitar a divisão. Querermos dividir $a^2+2ab+b^2$ por $b+a$ é mais conveniente ordenar este divisor segundo as potências decrescentes de a, isto é, $a+b$, que é nesta ordem que as letras a e b estão no dividendo.

Problema. Dividir $6a^2-13ax+6x^2$ por $2a-3x$

Solução. Ordeno o dividendo e o divisor

le dividendo do divisor

$$\begin{array}{r} 6a^2-13ax+6x^2 : 2a-3x \\ 3a-2x \\ \hline 0-4ax+12x^2 \end{array}$$

Prova. Multiplico o divisor pelo quociente obtemos exactamente o dividendo.

Regra. Ordenam-se o dividendo e o divisor, e depois divide-se o primeiro pelo primeiro termo do divisor. O resultado será o primeiro termo do quociente.

Multiplica-se o divisor por este termo do quociente, e subtrai-se o resultado do dividendo para formar um novo dividendo parcial.

Repete-se este processo até se dividirem todos os termos do dividendo; se não houver resto a divisão é exacta.

Exemplos de divisão

1.)	2.)
$\begin{array}{r} \text{Dividendo} \quad 6a^2 - 2a - 8 \\ \text{Divisor} \quad 2a + 2 \\ \hline 0 - 5a - 8 \\ \hline 0 \quad 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} x^3 + x^2y + x^2y + xy^2 + 2y \\ \hline 0 \quad 0 \quad +2y \end{array}$

Nota. No segundo exemplo, a divisão não é exacta, e o quociente é $x^2 + xy + \frac{2y}{x+y}$.

3. Dividir $ax^2 + 8ax + 1x^2$ por $2a - 2x$	Resp $2a - 2x$
4. Dividir $2x^2 + xy - 6y^2$ por $x + 2y$	$2x + 3y$
5. Dividir $x^2 + 2xy + y^2$ por $x + y$	$x + y$
6. Dividir $8a^3 - 8a^2$ por $2a^2 - 2x^2$	$4a^3 + 4x^2$
7. Dividir $ac + bc - ad - bd$ por $a + b$	$c - d$
8. Dividir $x^3 + y^3 - 3axy + x^2y$ por $x^2 + 4xy + y^2$	$x^2 - y$
9. Dividir $a^3 - 9a^2 + 27a - 27$ por $a - 3$	$a^2 - 6a + 9$
10. Dividir $a^3 - b^3$ por $a^2 + ab + b^2$	$a - b$
11. Dividir $y^3 - 1$ por $y + 1$	$y^2 - y + 1$
12. Dividir $12x^3 - 19x$ por $3x - 5$?
13. Dividir $a^3 - b^3$ por $a + b$?
14. Dividir $3x^2 - 6x - 4$ por $3x - 4$?
15. Dividir $x^3 - y^3$ por $x - y$	$x^2 + xy + y^2$

THEOREMAS

92. Theorema. Como já vimos no § 5, é uma proposição ou enunciado que mostra alguma relação ou propriedade das quantidades algébricas.

Vamos dar agora alguns theoremas importantes que ajudarão os alunos a executar com muita facilidade os pro-

blemas, e a verificar certas quantidades, e a verificar certas quantidades.

Estes theoremas devem ser conservados na memória para tirar proveito d'elles.

1º Theorema

93. A somma da quantidade a e b é $a + b$. Quando agora, esta somma, isto é, $a + b$, multiplicamos por $a - b$, temos o producto $a^2 - 2ab + b^2$, que verificamos na operação ao lado. Podemos então formular o

1º Theorema. O quadrado da somma de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira multiplicada pela segunda, mais o quadrado da segunda.

O leitor pode achar o quadrado das seguintes quantidades por meio do theorema:

Quantidades	Respostas
1. $(2+3)^2$?
2. $(a+b)^2$?
3. $(2m+3n)^2$?
4. $(ab+cd)^2$?
5. $(x^2+xy)^2$?

2º Theorema

94. A diferença entre as duas quantidades a e b é $a - b$. Quando esta diferença, isto é, $a - b$, multiplicamos por si mesma, $(a - b)^2$, temos $a^2 - 2ab + b^2$, que verificamos na operação ao lado. Podemos então formular o

2º Theorema. O quadrado da diferença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira multiplicada pela segunda, menos o quadrado da segunda.

Ao achar o quadrado das seguintes quantidades por meio do theorema:

Quantidades	Respostas
1. $(8-3)^2$?
2. $(a-b)^2$?
3. $(2m-3n)^2$?
4. $(ax-2x^2)^2$?
5. $(5a^2-b^2)^2$?

95. O signal \pm é uma combinação dos signaes $+$ e $-$.

Desde que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, e $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, podemos exprimir estas duas fórmulas em uma só, escrevendo assim,

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Para a multiplicação do signal $+$ deverá também ser correto o signal $-$ no o tomarmos no sentido negativo. E quando o signal $-$ estiver acompanhado por um signal $+$ por fim reduz-se a uma fórmula da mesma espécie da primeira.

3º Theorema

96. Multiplicando a somma $a+b$ pela diferença $a-b$, temos o producto seguinte: $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$, como vemos na operação ao lado. Podemos então formular o

$$\begin{array}{r} a \quad b \\ a \quad b \\ \hline a^2 + ab \\ -ab - b^2 \\ \hline a^2 - b^2 \end{array}$$

III Theorema. O producto da somma e da diferença de duas quantidades é igual ao quadrado da primeira menos o quadrado da segunda.

Achar o producto das seguintes quantidades por meio deste theorema

	Respostas		Respostas
1. $(5+3)(5-3)$.	25-9.	5. $(6+2)(6-2)$.	?
2. $(x+y)(x-y)$.	$x^2 - y^2$.	6. $(a+b)(a-b)$.	?
3. $(2x+3y)(2x-3y)$.	$4x^2 - 9y^2$.		
4. $(a^2+b^2)(a^2-b^2)$.	$a^4 - b^4$.		

4º Theorema

97. Se dividirmos 4 por 4, o quociente será 1, porque também, se dividirmos a^2 por a^2 , quociente será 1. Operando só com os expoentes, teremos $a^2 : a^2 = a^{2-2} = a^0$. Isto é, a elevado á potencia zero. Logo $a^0 = 1$. Podemos pois formular o

IV Theorema. Uma quantidade elevada á potencia zero é a unidade ou a 1.

Illustração. Muitas vezes na divisão dos monomios arithmeticos que se tem as potencias da base sendo iguaes no dividendo e no divisor exactas.

105. O resultado será $x^2y^2 + xy^2 - x^2 - 2x^2y - 3xy^2 - 2x - 1$, o quociente

com o expoente zero era nada alterava nas o seu valor, porque sendo $y^0 = 1$, $xy^0 = x$ e $xy^0 = x$.

Deste modo, q ualquer termo com o expoente zero pôde ser incluído um termo com a mesma o valor.

Chegar na seguintes divisões, conservando no quociente todas as potencias do dividendo.

Dividir $6a^2b^2c^2$ por $2a^2$

Dividir $32a^2b^2c^2$ por $4a^2$

Introduzir a e b como factores em $9c^2d^2$, e $9a^2b^2c^2d^2$.

5º Theorema

98. Se dividirmos a diferença de duas potencias iguaes de d, a divisão será exacta como podemos verificar nos seguintes exemplos.

$$\begin{array}{l} (a-b) = a^2 - ab + b^2 \\ (a^2-b^2) = (a-b)(a+b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2 \\ (a^3-b^3) = (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 \end{array}$$

Daique poderemos estabelecer o

V Theorema. A diferença de potencias iguaes de d, a

Nota. O dividendo deve verificar a exactidão das quatro divisões.

6º Theorema

99. Se dividirmos a diferença de duas potencias iguaes de d, a divisão será exacta, como podemos verificar pelos seguintes exemplos:

$$\begin{array}{l} (a^2-b^2) : (a+b) = (a-b) \\ (a^3-b^3) : (a+b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2 \\ (a^4-b^4) : (a+b) = a^3 - a^2b + a^2b - ab^2 + ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 \end{array}$$

Daqui poderemos formular o

VI Theorema. *A differença de potencias iguaes e pares de duas quantidades é sempre divisivel pela somma dessas quantidades.*

Nota. O discipulo deve verificar a exactidão das quatro divisões precedentes.

7° Theorema

100. Se dividirmos a somma de duas potencias iguaes e impares de duas quantidades pela somma das mesmas quantidades, a divisão será exacta, como poderemos verificar nos exemplos seguintes

$$\begin{aligned} a^3 - b^3 &= (a - b)(a^2 + ab + b^2) \\ a^5 - b^5 &= (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) \\ a^7 - b^7 &= (a - b)(a^6 + a^5b + a^4b^2 + a^3b^3 + a^2b^4 + ab^5 + b^6) \end{aligned}$$

Daqui poderemos formular o

VII Theorema. *A somma de duas potencias iguaes e impares de duas quantidades é sempre divisivel pela somma dessas quantidades.*

Nota. O discipulo deve verificar a exactidão das três divisões precedentes.

DIVISORES E MULTIPLOS

101. Quando um numero divide outro sem deixar resto, chama-se divisor desse numero. Assim, 4 é divisor de 12, porque o divide exactamente.

O divisor de um numero chama-se tambem factor desse numero, de sorte que 2, 3, 4 e 6 são divisores ou factores de 12, porque cada um desses numeros divide exactamente o numero 12.

102. Do mesmo modo a quantidade algebrica que divide exactamente outra, chama-se divisor ou factor dessa quantidade. Assim, a^3 é divisor ou factor de $a^4 - x$, porque esta quantidade se divide exactamente por a^3 , pois

103. Os numeros, quanto á sua divisibilidade, são ou primos ou multiplos.

Numero primo são os que não podem ser divididos exactamente senão por si mesmos ou por 1. Assim, o numero 7 só é divisivel por 7 ou por 1.

Todos os numeros primos desde 1 até 101 são 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101.

Numero multiplo são o producto de dois ou mais factores differentes, e por isso podem ser divididos exactamente por esses factores. Assim, 6 é o producto de 2 vezes 3 ou de 3 vezes 2, e por isso, alem de ser divisivel por si mesmo e por 1, como os numeros primos é ainda divisivel por 2 e por 3.

Os numeros multiplos são 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, etc.

Nota. O modo de se achar os numeros primos é a seguinte. Se dividirmos os numeros de 1 até 100 por todos os primos que se encontram até á metade, não nos resta mais a fazer, e os que não foram divididos são os primos.

Para facilitar a decomposição dos coefficientes numericos, aqui se dá o resultado das suas importantes caracteristicas de divisibilidade dos nu-

104. Se um numero é divisivel por 3, o seu multiplo de 3 também o é. Assim, se 3 divide 6 dividirá tambem 12, 18, 24, etc., que são multiplos de 6.

105. O factor commum a dois numeros divide tambem a sua somma, e a sua differença. Assim, se 4 divide 12 e 16 dividirá tambem a sua somma, que é 12+16=28, e a sua differença que é 16-12=4.

106. Destes e de outros principios deduzimos as seguintes caracteristicas da divisibilidade dos numeros.

1° *Todo numero par é divisivel por 2.*

Illustração. Os numeros pares são todos os 2, 4, 6, 8, etc. Ora, todos os numeros pares podem ser divididos exactamente por 2, e por isso são divisíveis por 2. Os numeros impares divididos por 2 deixam sempre resto.

2° *Todo numero, cuja somma dos seus algarismos for divisivel por 3, será tambem divisivel por 3.*

Illustração. A somma dos algarismos do numero 147 é 1+4+7=12. Ora, como 12 é divisivel por 3, o numero 147 tambem o é.

3° *Todo numero, cujos dois ultimos algarismos da direita formarem um numero multiplo de 4, será tambem divisivel por 4.*

Illustração. O numero 278 compõe-se de 200, 70 e 8. Ora 4 divide 200, não se faz resto e não divide 70 divide 70, não 200, 700, etc. que são múltiplos de 40. Portanto 4 divide 278 e não divide 2780.

4.º Todo numero que terminar em 5 ou 0, será divisível por 5.

Illustração. Os numeros que terminam em 5 ou 0, são todos múltiplos de 5. Logo 15, 20, 25, 30, etc. que são divisíveis por 5.

5.º Todo numero par divisível por 3, será também divisível por 6.

Illustração. Os primeiros numeros pares que são divisíveis por 3, são 6, 12, 18, 24, 30, etc. Ora, todos estes numeros são múltiplos de 6, e por isso são divisíveis por 6.

6.º Todo numero, cuja somma dos seus algarismos, for...

Illustração. O numero 4356 é divisível por 3, porque a somma dos seus algarismos é 18, que é divisível por 3.

7.º Todo numero terminado em 0 é divisível por 10 ou por 5 e por 2.

Illustração. Os numeros terminados em 0 são todos divisíveis por 10, 5 e 2.

8.º Todo numero que for divisível por dois numeros pri-

Illustração. Os numeros que são divisíveis por 2 e por 3, também são divisíveis por 6.

107. Vê-se nestes caracteres que um numero multiplo pôde ter muitas divisores ou factor. Assim, 36 é divisível por 2, porque é numero par, é divisível por 3, porque a somma dos seus algarismos é 9, que é divisível por 3, e finalmente é ainda divisível por 4, 1 ou 6, por 9, e também por 12.

Os numeros primos entre si, divide-se também n.

108. Factorar um numero é decompô-lo em factores primos.

Problema. Decompor o numero 210 em todos os seus factores primos.

Solução. Começamos a dividir 210 por 2, e obtemos 105. Logo 2 é um factor primo que o 210 tem exacto 105 vezes. Logo 105 é o quociente e 2 é o divisor. Logo 105 é divisível por 3, e obtemos 35. Logo 3 é um factor primo que o 210 tem exacto 35 vezes. Logo 35 é divisível por 5, e obtemos 7. Logo 5 é um factor primo que o 210 tem exacto 7 vezes. Logo 7 é divisível por 7, e obtemos 1. Logo 7 é um factor primo que o 210 tem exacto 1 vez. Logo 210 = 2 x 3 x 5 x 7.

Regra. Para acharmos todos os factores de um numero, dividiremos esse numero pelo menor numero primo que não deixe resto, dividiremos depois o quociente por outro numero primo que tambem não deixe resto; e assim continuaremos repetindo se a divisão para cada factor tantas vezes quantas possivel, até o quociente ficar 1. Os varios divisores serão os factores primos de numero dado.

Decompõe os seguintes numeros em todos os seus factores primos:

1. 12...	Resp. 2 x 2 x 3	6. 20.....	Resp. 2 x 2 x 5
2. 15...	3 x 5	7. 24	2 x 2 x 2 x 3
3. 21...	3 x 7	8. 36	2 x 2 x 3 x 3
4. 26 ..	2 x 13	9. 66	2 x 3 x 11
5. 36...	2 x 2 x 3 x 3	10. 100	2 x 2 x 5 x 5

Decomposição das quantidades algebricas

109. As quantidades algebricas, quanto á sua decomposição, dividem-se em primas e compostas.

Quantidade prima é a que não pôde ser dividida exactamente senão por si mesma ou por 1. Assim, a , b , c , d , e , f , g , h , i , j , k , l , m , n , o , p , q , r , s , t , u , v , w , x , y , z , são quantidades primas, porque não tendo outro divisor além da unidade e da propria quantidade, não podem ser factorizadas ou decompostas pela divisão.

110. **Quantidade composta** é o producto de duas ou mais factores. Assim, a quantidade ax é o producto de a e x , a quantidade ab é o producto de a e b , a quantidade $2a + 3b$ é o producto de $2a + 3b$ e 1 , etc. Ora, senão os factores, podem tambem pela divisão ser decompostos nesses factores.

111. Uma quantidade prima, chama-se factor composto, quando elle é o producto de duas ou mais quantidades primas.

a e x^2 , o factor a será primo e o factor x^2 será composto de $x \cdot x$. Se tomarmos ab como um factor, ele será um factor composto de $a \cdot b$, mas a e b tomados separadamente, são factores primos.

112. Duas ou mais quantidades algebricas são primas entre si, quando nenhuma outra quantidade as pôde dividir exactamente. Assim, ab e cd são quantidades primas entre si, porque não há divisor que divida ambas exactamente.

113. Para decompormos um monómio, temos de factorar primeiro o seu coefficiente numeral, conforme o methodo exposto no n.º 108 e depois factorar a parte litteral.

114. A decomposição da parte litteral não offerece difficuldade alguma, porque estando cada factor litteral expresso em uma letra ou em um expoente, só teremos de escrever cada factor do monómio separado pelo signal \times .

Problema. Decompor a quantidade $15a^2b$ em seus factores primos.

Solução. O coefficiente 15 decompõe-se em 3 e 5, a quantidade a^2 de compõe-se em $a \cdot a$ e a letra b não se divide o factor 2. Ficará $3 \times 5 \times a \times a \times b$.

$$15a^2b \\ 3 \times 5 \times a \times a \times b$$

Regra. Para se factorar um monómio, decompõe-se o coefficiente numeral em seus factores primos, e a estes juntam-se todos os factores litteraes do monómio, ficando cada um separado pelo signal \times .

Decompõe os seguintes monómios em seus factores primos

1. $12ab^2c$.	Resp.	$2 \times 2 \times 3 \times a \times b \times b \times c$
2. $21a^2x^2y$.	"	$3 \times 7 \times a \times a \times x \times x \times y$
3. $35a^3c^2x$.	"	$5 \times 7 \times a \times a \times a \times c \times c \times x$
4. $20x^2y^3$.	"	$2 \times 2 \times 5 \times x \times x \times y \times y \times y$
5. $39a^2m^2n$.	"	$3 \times 13 \times a \times a \times m \times m \times n$

Decomposição dos polynomios

115. **Problema.** Decompor a quantidade x^2+ax em seus factores

Solução. A quantidade x^2+ax divide-se exactamente por x , ficando $x+a$ pelo quociente. Logo a quantidade x^2+ax divide-se exactamente em $x \times (x+a)$ ou $x(1+a)$.

Regra. Divide-se o polynomio pelo maior monómio que divida exactamente cada um dos seus termos.

Então, o divisor será um factor, e o quociente será outro.

De compôr os seguintes polynomios em seus factores:

1. $2x+2$	Resp.	$2(x+1)$.
2. $am+ac$.	"	$a(m+c)$.
3. bc^2+bcd .	"	$bc(c+d)$.
4. $4x^2+6xy$	"	$2x(2x+3y)$.
5. $6xy-9bxy^2-12x^2y$.	"	$3xy(2x-3by-4xc)$.
6. $5ax^2-35x^2y+5a^2x^2y$	"	$5ax^2(1-7xy+axy)$.
7. $a^2em^2+a^2cm^2-a^2em^2$.	"	$a^2em^2(a+c-m)$.
8. $a+ab+ac$	"	$a(1+b+c)$.
9. $2ax+2ay+4az$.	"	$2a(x+y+2z)$.
10. $3bca+3bca-3abc$	"	$3abc(b+c-a)$.

116. Para decompormos em seus factores primos um binómio ou um trinómio, producto de dois ou mais polynomios, é necessário recorrermos aos seguintes principios baseados nos theoremas que já formulamos.

1. Um trinómio pôde ser decomposto em dois factores binómios, quando os termos extremos são quadrados positivos, e o termo medio é duas vezes o producto das raizes quadradas dos extremos. Os factores serão a somma ou a differença das raizes quadradas dos termos extremos, segundo for mais ou menos o signal do termo medio (n.º 95). Assim,

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)(a+b), \\ a^2-2ab+b^2=(a-b)(a-b).$$

2.º Um binómio que é a differença de dois quadrados, pôde ser decomposto em dois factores, sendo um a somma e o outro a differença das raizes dos dois quadrados (n.º 99). Assim,

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b),$$

3.º Um binómio que é a differença de potencias iguaes de duas quantidades, pôde ser decomposto, pelo menos, em dois factores, sendo um delle a differença das duas quantidades (n.º 98). Assim,

$$x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2) \\ x^4-y^4=(x-y)(x^3+x^2y+xy^2+y^3)$$

Neste caso, dividindo-se o binómio pelo factor conhecido, acha-se o outro factor no quociente.

4.º Um binómio que é a diferença de potências iguais e pares de duas quantidades, pôde ser decomposto, pelo menos, em tres factores, um dos quaes é a somma, outro a diferença das quantidades. Aqui deve entender-se que as potências pares devem ser superiores ao quadrado (n.º 89). Assim,

$$a^4 - b^4 = (a^2 + b^2)(a^2 - b^2) = (a+b)(a-b)(a^2 + b^2).$$

binómio $a^4 - b^4$ pôde ser decomposto nos factores $(a^2 - b^2)$ $(a^2 + b^2)$; ora, o factor $a^2 - b^2$ pôde ser também decomposto em $(a+b)$ $(a-b)$ e assim $(a^4 - b^4)$ pôde ser decomposto nos factores $(a+b)$, $(a-b)$ e $(a^2 + b^2)$.

5.º Um binómio que é a somma de potências iguais e impares de duas quantidades, pôde ser decomposto, pelo menos, em dois factores, sendo um dos factores a somma das quantidades (n.º 100). Assim,

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2).$$

Decompõe as seguintes quantidades algebraicas em seus factores primos

1. $x^2 + 2xy + y^2$	Resp. $(x+y)(x+y)$.
2. $9a^2 + 12ab + 4b^2$	$(3a+2b)(3a+2b)$.
3. $4 + 12x + 9x^2$	$(2+3x)(2+3x)$.
4. $m^2 - 2mn + n^2$	$(m-n)(m-n)$.
5. $x^2 - 4x + 4$	$(x-2)(x-2)$.
6. $x^2 - 4x + 4$	$(x-2)(x-2)$.
7. $3m^2 - 4n^2$	$(3m-4n)(3m+4n)$.
8. $x^4 - a^4$	Resp. $(x+a)(x-a)(x^2 + a^2)$.
9. $x^4 - a^4$	Resp. $(x+a)(x-a)(x^2 + a^2)$.
10. $x^4 - a^4$	Resp. $(x+a)(x-a)(x^2 + a^2)$.
11. $x^4 - a^4$	Resp. $(x+a)(x-a)(x^2 + a^2)$.
12. $x^4 - a^4$	Resp. $(x+a)(x-a)(x^2 + a^2)$.

117. Muitas vezes um binómio ou trinómio contém mais factores além dos que se podem conhecer pelos princípios já expostos; neste caso, é necessário decompôr a quantidade em dois factores, de sorte que um dos factores seja o binómio ou trinómio nas condições de ser decomposto nos factores referidos. Assim, $a^2x - x^3 = x(a^2 - x^2)$; ora, $a^2 - x^2$ decompõe-se em $(a+x)(a-x)$, então $a^2x - x^3$ se decompõe em $x(a+x)(a-x)$.

13. $7a^2 - 14ax + 7x^2$	Resp. $7(a-x)(a-x)$.
14. $ax^2 - ay^2$	$a(x+y)(x-y)$.
15. $cm^2 - 2cmn + cn^2$	$c(m-n)(m-n)$.
16. $ay^2 - az^2$	$a(y+z)(y-z)$.

118. Quando o primeiro termo de um trinómio é um quadrado, e o coefficiente do segundo termo é a somma de duas quantidades, e o terceiro termo é o producto das duas quantidades, o trinómio se decompõe em dois factores binómios. Assim, $a^2 + 7a + 12$ é um trinómio que tem o primeiro termo quadrado, o coefficiente do segundo termo é a somma de 3 e 4, cujo producto é 12, e o terceiro termo é o producto de 3 e 4, logo se decompõe em $(a+3)(a+4)$.

17. $x^2 + 5x + 6$	Resp. $(x+2)(x+3)$
18. $x^2 - 5x + 6$	$(x-2)(x-3)$
19. $x^2 - 9x + 20$	$(x-4)(x-5)$
20. $x^2 + 13x + 40$	$(x+5)(x+8)$
21. $x^2 - 6x + 8$	$(x-2)(x-4)$

119. A decomposição das quantidades algebraicas, além de outras vantagens, auxilia a achar mais rapidamente o resultado das operações. Se, por exemplo, queremos dividir $x^2 + 2xy + y^2$ por $x+y$, e depois dividir o producto por $x+y$, teríamos de fazer uma longa multiplicação e depois uma longa divisão, ambas as operações sujeitas a enganos. Decompondo, porém $x^2 + 2xy + y^2$ em seus factores $(x+y)(x+y)$, e indicando as operações, temos

$$\frac{(x+y)(x+y)}{x+y} = (x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2.$$

Nesta expressão, como o factor $x+y$ é common ao dividendo e ao divisor, elimina-se ou cancella-se em ambos os termos, e o resultado é $(x+y)(x+y) = x^2 + 2xy + y^2$ (3.º Theorema).

MAXIMO DIVISOR COMMUN

120. Divisor é uma quantidade que divide outra exactamente.

121. Divisor common de duas ou mais quantidades é uma quantidade que as divide a todas exactamente. Assim, a é divisor common de ax , ab e ac , porque divide exactamente essas quantidades.

122. Maximo divisor common de duas ou mais quantidades é a maior quantidade que divide todas ellas exactamente.

123. Duas ou mais quantidades podem ter muitos divisores communs, assim, 16 e 24 tem tres divisores communs, que são 2, 4 e 8; ora, sendo 8 o maior dos tres, chama-se por isso maximo divisor common de 16 e 24.

com maxima divisor common de muitos outros numeros
doz, como 32, 40, 48, etc

Problema. Qual é o máximo divisor comum de $6abx$, $10acx$ e $14cdx$?

Solução. Responde-se se tem
um dado em suas faces primas,
pois-se logo que 3, 4 e 5 são as únicas
que não são primas como fatores na
decomposição em divisores comuns das três
quantidades. O maior divisor comum
é o produto contínuo destes divi-
sores, isto é, 60, e não 30.

Οπαδός

$$\text{Bab}_x = 2 \times 3 \times n \times v \times a.$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right)$$

$$20x$$

Demoneletração. Já vimos na sessão 100, 84 há muito que há de ser

1. $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

de modo que α é o produto de todos os fatores primos p com

Regra. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$ ou $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$
 fa. todas primos, e o produto continuado de todos os fatores
 em forma de fração, com o seu máximo divisor com-
 mum.

Problema. Qual é o M. d. c. de $4a^2x^3$ ou $6Jm^2$?

Всего. По числу полученных на

A bar o M, d. o. due seguita quantidade

1. $4a^2x^2$ e $16ax^3$,
2. $9abc^2$ e $12c^2x$,
3. $4a^3b^2x^2y^2$ e $8a^2x^3y^3$,
4. $3a^4y^3$, $6a^2xy^5$ e $9a^6y^4$,
5. $8ax^3y^4$, $12x^2y^3$ e $24a^4xy^3$,
6. $9xy$, $15a^2x^2y$ e $5a^3xy$.

Resp	$2a_1x^2$
"	$3b_1x^3$
"	$4a^2x^2y^2$
"	$3a^3y^3$
"	"
"	"

Achar o maximo divisor das quantidades por meio da divisao continuada

124. Podemos também achar o M. d. c. de duas ou mais quantidades por meio da divisão continuada, isto é por uma sucessão de divisões seguidas

Problema. Qual é o M. d. c. de 30r e 42r?

Exercício. Dividendo a quantidade maior pelo menor o quociente é 1, o resto é 12. Dividido agora o primeiro divisor 368 pelo primeiro res.
12, o quociente é 3 e o resto de 16.
Dividido o 12 pelo 16, o quociente é 0, o resto é 12.

1. Atribuição de valores que é o M. d. e.
 do SOR e das progressões não definidas como
 B-valor ou C-
 2. Atribuição de valores que é o M. d. e.
 1. Este é o M. d. e. atribuído comunitariamente

2.4 Quid sit & a maximo d'v wor
conferat de adx a 12a.

Primeiro. Vamos provar que se o L.V. α é menor comensurável de β ou o β é maior comensurável de α , então α e β são comensuráveis. Para isto basta dividir o próprio α de β e obter α/β e β/α e verificar se são números racionais. Se α é menor comensurável de β , então α/β é um número racional. Se β é maior comensurável de α , então β/α é um número racional. Portanto, se α e β são comensuráveis, então α/β e β/α são números racionais. Reciprocamente, se α/β e β/α são números racionais, então α e β são comensuráveis. Portanto, α e β são comensuráveis se e somente se α/β e β/α são números racionais.

de 30,00 a 42,00, que é a quantidade maior. Logo não é uma distribuição normal.

Вспомогательная теорема. Пусть a и b — взаимно простые натуральные числа, n — натуральное число, d — делитель a . Тогда a/d и b взаимно просты.

Se o maximo de calor consumido não é ter chumbo a fundir em menor quantidade de Mat. mas já provimos que se é um metal consumido dos q. mais duros e de por isso mais, a quantidade menor de c. se poderá ser o M. d. a. de base.

Se o produto q for M , d. o. seja maior do que q e q como ele divide $20q$, o q divide também a diferença de $20q - q = 19q$, e se divide $12q$, divide o produto de $12q \cdot 19q = 228q$

Dividindo 240 e 500 dividirá a diferença destas quantidades que é 100 - 240 = 60. Ora se para não deixar resto no dividendo, só pôde ser dividido por si mesmo ou por uma q. m. l. menor do que 60. Logo, 60 é o maior divisor comum de 240 e 500 e 420.

Regra. Divide-se a quantidade maior pela menor, depois divide-se o primeiro divisor pelo primeiro resto, e o segundo divisor pelo segundo resto e assim por diante até a divisão não deixar resto.

O número divisor será o máximo divisor comum.

Nota. Quando ha mais de duas quantidades sobre o M. d. o. das
le. e assim por diante. De sorte que se quizermos achar o M. d. c. de 48a.
e 108a, acharemos prime ro o M. d. c. de 48a e 72a que é 24a, e depois
achamos o M. d. o. de 24a e 108a; que é 12a. Assim, o M. d. c. de 48a,
e 108a é 12a.

Matéria. Div. de polinômios.

125. Para acharmos o máximo divisor com um dos polinômios podemos empregar os mesmos processos que já empregamos para achar o máximo divisor de dois números a saber.

1.ª Decomposição das quantidades em seus factores primos.

2.ª Divisão continuada das quantidades.

3.ª Acharmos pelo primeiro.

Problema. Qual o M. d. c. de $a^2 - 2ab + b^2$ e $a^2 - b^2$?

Solução. A primeira quantidade é igual a $(a-b)^2$ e a segunda é igual a $(a-b)(a+b)$.

Operação

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

A primeira quantidade é igual a $(a-b)^2$ e a segunda é igual a $(a-b)(a+b)$.

Quando o M. d. c. dos resultados polinômicos for o mesmo, esse é o M. d. c. dos polinômios.

Achar o M. d. c. dos seguintes polinômios:

1. $a^2 + 2ab + b^2$ e $a^2 - b^2$.

2. $x^2 - y^2$ e $x^2 + y^2$.

3. $a^2x^2 - 4ax + 4$ e $ax - 2$.

4. $4x^2 - 12x + 9$ e $4x^2 - 9$.

5. $x^2 + y^2$ e $x^2 + 2xy + y^2$.

6. $b^2 - 1$ e $b^2 + 1$.

7. $5a^2 + 5ax$ e $a^2 - x^2$.

8. $a^3 - a^2x$ e $x^2 + 2x + 1$.

126. Vamos achar agora o M. d. c. de dois polinômios por meio da divisão continuada desses dois polinômios.

Problema. Qual o M. d. c. de $4a^3 - 21a^2 + 15a + 20$ e $a^2 - 6a + 8$?

Operação

$$4a^3 - 21a^2 + 15a + 20 \div a^2 - 6a + 8$$

Solução. Dividindo a primeira quantidade pela menor o quociente é $4a + 3$ e o resto é $4a + 1$.

Dividindo a primeira quantidade pela segunda o quociente é 4 e o resto é $4a + 1$.

Este processo apresenta-se muito útil para os discípulos, principalmente quando se trata de dividir os

divisores das quantidades dadas, e as recomendações do professor, o primeiro processo, ao qual juntamos os exercícios para a prática.

MINIMO MULTIPLO COMMUM

127. Múltiplo de uma quantidade de qualquer outra quantidade é qualquer quantidade que contenha todas as suas partes. Assim, $6x$ é múltiplo de 2 porque contém 3 vezes o número 2 ; $20x$ é múltiplo de $5x$, porque contém 4 vezes $5x$.

128. Múltiplo commum de duas ou mais quantidades é qualquer outra quantidade que contenha todas ellas um exacto numero de vezes. Assim, $12y$ é múltiplo commum de $2y$, $3y$, $4y$ e $6y$, e porque contém 6 vezes $2y$, 4 vezes $3y$, 3 vezes $4y$ ou 2 vezes $6y$, e por isso pôde dividir-se exactamente por todas as quantidades.

129. Mínimo múltiplo commum de duas ou mais quantidades é o menor numero de vezes. Assim, $12x$ é o mínimo múltiplo commum de $2x$ e $6x$, porque nenhuma outra quantidade menor do que $12x$ poderá conter exactamente as duas quantidades exacto numero de vezes.

Duas ou mais quantidades tem um numero limitado de múltiplos communs; assim, os múltiplos communs de 4 e 6 são 12, 24, 36, 48, 60 e todos os numeros que formam esta progressão. Ora, é evidente que 12 é o menor de todos, e por isso 12 é o mínimo múltiplo commum de 4 e 6.

130. Qualquer quantidade contém outra um exacto numero de vezes, se tiver todos os factores primos dessa quantidade. Assim, 30 contém o numero 6 cinco vezes exactas, porque sendo composto de $2 \times 3 \times 5$ tem os factores 2 e 3 de que se compõe o numero 6. ($2 \times 3 = 6$). Portanto, para que uma quantidade contenha outra exactamente, bastará somente que ella tenha todos os factores primos dessa quantidade.

131. Para que qualquer quantidade contenha exactamente duas ou mais quantidades, é necessario que ella contenha todos os diferentes factores primos dessas quantidades. E para ser a menor quantidade que exactamente as contenha, deve não ter nenhum outro factor além dos que tiverem essas quantidades; e por isso o mínimo múltiplo commum de duas ou mais quantidades tem todos os diferentes factores primos dessas quantidades e não contém nenhum outro factor.

O mínimo múltiplo commum de a^2b e acx é a^2bcx , porque tem todos os factores de cada uma dessas quantidades, e não contém nenhum outro factor estranho.

Nota. Por abreviatura, usaremos as initiaes M. m. c. para significar o mínimo múltiplo commum.

136 A fração algebraica $\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ é igual a $\frac{a-b}{a+b}$.

lê-se: «a dividido por b».

137 O quociente de $\frac{a}{b}$ dividido por x é menos y .

138 O quociente de $\frac{a}{b}$ dividido por x é menos y .

139 O quociente de $\frac{a}{b}$ dividido por x é menos y .

140. Theorema I. Se multiplicarmos o numerador por um numero inteiro, sem alterarmos o denominador, o valor da fracção ficará multiplicado por esse numero.

Demonstração. Se multiplicarmos o numerador de $\frac{2}{7}$ por 3 sem alterarmos o denominador, teremos $\frac{6}{7}$. Ora $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{7}$ tem o mesmo denominador e portanto exprimem partes do mesmo tamanho, mas $\frac{6}{7}$ tem 3

$$\frac{2 \times 3}{7} = \frac{6}{7}$$

vezes a fracção.

141. Theorema II. Se dividirmos o numerador de uma fracção por um numero, sem alterarmos o denominador, o valor da fracção fica dividido por esse numero.

Demonstração. Se dividirmos o numerador de $\frac{4}{5}$ por 2, teremos $\frac{2}{5}$. Ora, $\frac{4}{5}$ e $\frac{2}{5}$ tem o mesmo denominador, e por isso exprimem partes do mesmo tamanho. Mas o numerador de $\frac{2}{5}$ é só a metade do numerador de $\frac{4}{5}$ e desta modo exprime só a metade das partes

$$\frac{4 \div 2}{5} = \frac{2}{5}$$

142. Theorema III. Se multiplicarmos o numerador e o denominador de uma fracção por um mesmo numero, o valor da fracção não se altera.

Demonstração. Se multiplicarmos o numerador e o denominador de $\frac{2}{7}$ por 3, teremos $\frac{6}{21}$. Ora, $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$ tem o mesmo valor, pois $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

Mas na segunda fracção de tamanho das da primeira ou de um terço e estas são o dobro do valor da primeira.

143. Theorema IV. Se dividirmos o denominador de uma fracção por um numero, o valor da fracção ficará multiplicado por esse numero.

Demonstração. Se dividirmos o denominador de $\frac{2}{7}$ por 2, teremos $\frac{2}{3}$. Ora, $\frac{2}{7}$ e $\frac{2}{3}$ tem o mesmo numerador e portanto exprimem partes da mesma unidade, mas como as partes da primeira são de um terço e as da segunda de um quarto, a segunda é o dobro da primeira.

144. Theorema V. Se multiplicarmos ou dividirmos o numerador e o denominador de uma fracção por um mesmo numero, mudando a forma dessa fracção, mas não lhe alteraremos o valor.

Demonstração. Se multiplicarmos o numerador e o denominador de $\frac{2}{7}$ por 3, teremos $\frac{6}{21}$. Ora, $\frac{2}{7}$ e $\frac{6}{21}$ tem o mesmo valor, pois $\frac{6}{21} = \frac{2}{7}$.

Se dividirmos o numerador e o denominador de uma fracção por qualquer numero, o valor da fracção não se altera.

145. Muitas vezes uma fracção algebraica exprime também um certo numero de fracções iguaes; assim, a fracção $\frac{4}{5}$ pode ser considerada $\frac{1}{5}$ tomado 4 vezes, $\frac{4}{5} \times 4 = \frac{4}{5}$; a fracção $\frac{2}{3}$ pode ser considerada $\frac{1}{3}$ tomado 2 vezes, $\frac{2}{3} \times 2 = \frac{2}{3}$.

146. Antes de entrarmos nos diversos processos de simplificação das fracções algebraicas, vamos lembrar que se $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ são duas fracções, e se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b} \times \frac{d}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{b}{b}$, ou seja $\frac{ad}{bd} = \frac{cb}{db}$.

Estas transformações são as seguintes:

- 1.º Reduzir frações á expressão mais simples.
- 2.º Transformar frações em quantidades inteiras ou mixtas
- 3.º Transformar quantidades inteiras ou mixtas em frações
- 4.º Reduzir frações ao mínimo denominador comum.

Reduzir frações algebraicas á expressão mais simples

147. Reduzir uma fração algebraica á sua expressão mais simples, isto é, á expressão em que o numerador e o denominador não tenham factor commun, mas com o mesmo valor.

148. As frações algebraicas que tiverem factores communs no numerador e no denominador, podem ser reduzidas á expressão mais simples, dividindo-se o numerador e o denominador pelo factor commun. As frações que não tiverem factores communs não se podem reduzir assim.

Problema. Reduzir $\frac{8ab^2}{15ab^2}$ á sua expressão mais simples.

Solução. Decompondo os dois termos da fração em seus factores primos, temos:

$$\frac{8ab^2}{15ab^2} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot a \cdot b \cdot b}{3 \cdot 5 \cdot a \cdot b \cdot b} =$$

Demonstração. Cancelar no numerador os factores b e b e o mesmo no denominador, não altera o valor da fração, como ficou demonstrado no n.º 144. Os communs ao numerador e ao denominador são a e b^2 . Temos portanto as duas regras seguintes para a redução de frações.

Regra. Para se reduzir uma fração algebraica á sua expressão mais simples, divide-se o numerador e o denominador pelo factor commun.

ou então

Dividem-se ambos os termos da fração pelo seu máximo divisor commum

ou por cada um dos seus divisores communs á sua expressão mais

	Resp.	$\frac{2a^2}{3a}$	7.	$\frac{7xy}{6x^2y}$	Resp. ?
2.		$\frac{2a}{3}$	8.	$\frac{2x^2y}{3x^2y}$?
		$\frac{2a}{3}$	9.	$\frac{4x^2y}{3x^2y}$?
		$\frac{2a}{3}$	10.	$\frac{10x^2y}{3x^2y}$?
		$\frac{2a}{3}$	11.	$\frac{10x^2y}{3x^2y}$?
		$\frac{2a}{3}$	12.	$\frac{10x^2y}{3x^2y}$?

14.	Simplificar	$\frac{2x^2y^2 + 2acx}{15ab^2}$	Resp.	$\frac{2x^2y^2}{15ab^2}$
15.	Simplificar	$\frac{2x^2y^2}{15ab^2 + 4ab^2}$		$\frac{2x^2y^2}{19ab^2}$
16.	Simplificar	$\frac{x^2 - y^2}{x^2 - 2xy + y^2}$		$\frac{x + y}{x - y}$
27.	Simplificar	$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2n + 1}$		$\frac{1}{n + 1}$
18.	Simplificar	$\frac{a^2 + 2ab + b^2}{a^2 + b^2}$		$\frac{a + b}{a^2 + b^2}$

Transformar frações algebraicas em quantidades inteiras ou mixtas

149. Muitas vezes uma expressão algebraica tem a forma de uma fração, e é necessário pois saber dar a esta expressão forma inteira.

Problema. Transformar $\frac{3ax+b^2}{x}$ em uma quantidade inteira ou mixta

Solução. Dado que o numerador é $3ax+b^2$

Operação

que ficará $3a+b$

Regra. Divide-se o numerador pelo denominador, e o resto, se houver, fica sob o denominador, e junta-se a parte inteira.

$ab+ba$	Regra	$ab+ba$	7	$ab+ba$	Regra
$2. ab+ba$	2	$ab+ba$	8	$ab+ba$	8
$3. ab+ba$	3	$ab+ba$	9	$ab+ba$	9
$4. ab+ba$	4	$ab+ba$	10	$ab+ba$	10
$5. ab+ba$	5	$ab+ba$	11	$ab+ba$	11
$6. ab+ba$	6	$ab+ba$	12	$ab+ba$	12

D. a uma quantidade mixta a forma de fracção

180. Problema. Transformar $a+\frac{b}{c}$ em uma fracção

Solução. Multiplica-se a parte inteira pelo denominador, mas dando-se-lhe o denominador c , ficará com o seu valor primitivo, e na forma de fracção. Juntado-se agora a fracção $\frac{b}{c}$ ficará $\frac{ac+b}{c}$

Operação

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

Regra. Multiplica-se a parte inteira pelo denominador da fracção, e junta-se ao numerador com o signal competente, e o resultado escreve-se sobre o denominador.

181. Antes de resolvermos os exercicios deste processo, nos reflectir sobre o modo por que temos de operar signaes das fracções, para não acharmos difficuldade

1.º Caso. Transformar $\frac{a}{b}$ em uma fracção mixta. A parte inteira é a parte que se divide pelo denominador, e o signal prefixo á fracção domina a fracção.

2.º Caso. Transformar $\frac{a}{b}$ em uma fracção mixta. A parte inteira é a parte que se divide pelo denominador, e o signal prefixo á fracção domina a fracção.

3.º Caso. Transformar $\frac{a}{b}$ em uma fracção mixta. A parte inteira é a parte que se divide pelo denominador, e o signal prefixo á fracção domina a fracção.

Solução. Nos 3.ºs casos, como o signal que signa a fracção é parte inteira, e a parte inteira é a parte que se divide pelo denominador, e o signal prefixo á fracção domina a fracção.

4.º Caso. Transformar $\frac{a}{b}$ em uma fracção mixta. A parte inteira é a parte que se divide pelo denominador, e o signal prefixo á fracção domina a fracção.

2.º Caso. Transformar $a+\frac{b}{c}$ em uma fracção.

$$a + \frac{b}{c} = \frac{ac+b}{c}$$

Solução. Multiplica-se a parte inteira pelo denominador, mas dando-se-lhe o denominador c , ficará com o seu valor primitivo, e na forma de fracção. Juntado-se agora a fracção $\frac{b}{c}$ ficará $\frac{ac+b}{c}$

1.º Caso. Transformar $\frac{a}{b}$ em uma fracção mixta. A parte inteira é a parte que se divide pelo denominador, e o signal prefixo á fracção domina a fracção.

$\frac{a}{b}$	Regra	$\frac{a}{b}$	$1.º$	$\frac{a}{b}$	$1.º$
$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$2.º$	$\frac{a}{b}$	$2.º$
$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$3.º$	$\frac{a}{b}$	$3.º$
$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$4.º$	$\frac{a}{b}$	$4.º$
$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$5.º$	$\frac{a}{b}$	$5.º$
$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}$	$6.º$	$\frac{a}{b}$	$6.º$

Resp.

152. Problema. Transformar $3x$ em uma fração e n o denominador ab .

Solução. Se transformado em uma fração

Operação

temos que a fração é $\frac{3x}{1}$.

Para pôr o denominador

já existente ab multiplicamos o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, não se altera o valor da fração. Logo temos

Regra. Para transformar um termo em uma fração com o denominador dado

1. Transformar $3x$ em uma fração que tenha o denominador b .

Resp.

2. Transformar $3xy$ em uma fração que tenha o denominador $2a$.

Resp.

3. Transformar $a+b$ em uma fração que tenha o denominador $a-b$.

Resp.

4. Transformar $2xy$ em uma fração que tenha o denominador $3a-2b$.

Resp. $\frac{2xy}{3a-2b}$

Reduzir frações a um denominador comum

153

Reduzir as frações $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ a um denominador comum.

154

Reduzir as frações $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ a um denominador comum.

153. Reduzir as frações $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$ a um denominador comum.

Para reduzir as frações a um denominador comum, devemos primeiro achar o denominador comum.

Para achar o denominador comum, multiplicamos os denominadores dados, pois abc é múltiplo de a, b e c .

Neste exemplo, vemos que o denominador comum deve ser abc .

Problema. Reduzir $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}$ e $\frac{1}{c}$ a um denominador comum.

Solução. O denominador comum é abc .

Operação

Multiplicando o numerador de cada fração pelo denominador comum, temos:

$\frac{1}{a} = \frac{bc}{abc}$

$\frac{1}{b} = \frac{ac}{abc}$

$\frac{1}{c} = \frac{ab}{abc}$

Regra. Multiplicam-se entre si os denominadores, e o produto será o denominador comum.

Multiplica-se depois o numerador de cada fração pelo denominador comum, e o produto será o numerador correspondente a cada fração.

Reduzir cada uma das frações a um denominador comum.

Resp. $\frac{bc}{abc}, \frac{ac}{abc}, \frac{ab}{abc}$

» $\frac{1}{a} = \frac{bc}{abc}$

» $\frac{1}{b} = \frac{ac}{abc}$

» $\frac{1}{c} = \frac{ab}{abc}$

» $\frac{1}{a} = \frac{bc}{abc}$

» $\frac{1}{b} = \frac{ac}{abc}$

Problema

Solução. Como as denominadoras são diferentes, temos de reduzir primeiro as frações a um denominador comum, e depois a soma dos numeradores sobre elle.

Operação

$$\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{3x}{12} + \frac{3x}{12} + \frac{2x}{12} = ?$$

$$\frac{6x+3x+2x}{12} = \frac{11x}{12}$$

Regra. Reduzem-se as frações a um denominador comum, e depois crepe-se a somma dos numeradores sobre elle.

Exercícios para a memória

1. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} = ?$
2. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} = ?$
3. $\frac{2b+c}{x} + \frac{8b-c}{x} = ?$
4. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5} = ?$
5. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5} + \frac{e}{6} = ?$
6. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5} + \frac{e}{6} + \frac{f}{7} = ?$
7. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5} + \frac{e}{6} + \frac{f}{7} + \frac{g}{8} = ?$
8. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5} + \frac{e}{6} + \frac{f}{7} + \frac{g}{8} + \frac{h}{9} = ?$
9. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5} + \frac{e}{6} + \frac{f}{7} + \frac{g}{8} + \frac{h}{9} + \frac{i}{10} = ?$
10. $\frac{a}{2} + \frac{b}{3} + \frac{c}{4} + \frac{d}{5} + \frac{e}{6} + \frac{f}{7} + \frac{g}{8} + \frac{h}{9} + \frac{i}{10} + \frac{j}{11} = ?$

Substituição de frações

153

1. Substitua-se $\frac{a}{2}$ por $\frac{3a}{6}$ e $\frac{b}{3}$ por $\frac{2b}{6}$ na expressão $\frac{a}{2} + \frac{b}{3}$. Assim, a expressão ficará $\frac{3a}{6} + \frac{2b}{6}$.

Problema

Solução. Como na 1.ª e 2.ª regras denote-se $\frac{a}{2}$ por $\frac{3a}{6}$ e $\frac{b}{3}$ por $\frac{2b}{6}$, e então entre o + e o que o a + b, e então ficará $\frac{3a}{6} + \frac{2b}{6}$.

Problema. Subtrahir $\frac{3a}{2}$ de

Operação

Regra. Reduzem-se as frações a um denominador comum, e depois a soma dos numeradores sobre elle.

Exercícios para a memória

1. De $\frac{5}{3}$ subtrahir $\frac{3}{2}$. Resp. $\frac{10}{6} - \frac{9}{6} = \frac{1}{6}$.
2. De $\frac{7}{4}$ subtrahir $\frac{5}{6}$. Resp. $\frac{21}{12} - \frac{10}{12} = \frac{11}{12}$.
3. De $\frac{9}{2}$ subtrahir $\frac{7}{3}$. Resp. $\frac{27}{6} - \frac{14}{6} = \frac{13}{6}$.
4. De $\frac{11}{3}$ subtrahir $\frac{8}{4}$. Resp. $\frac{22}{6} - \frac{12}{6} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$.
5. De $\frac{13}{4}$ subtrahir $\frac{10}{6}$. Resp. $\frac{39}{12} - \frac{20}{12} = \frac{19}{12}$.
6. De $\frac{15}{5}$ subtrahir $\frac{12}{7}$. Resp. $\frac{3}{1} - \frac{12}{7} = \frac{21}{7} - \frac{12}{7} = \frac{9}{7}$.
7. De $\frac{17}{6}$ subtrahir $\frac{14}{8}$. Resp. $\frac{34}{12} - \frac{21}{12} = \frac{13}{12}$.
8. De $\frac{19}{7}$ subtrahir $\frac{16}{9}$. Resp. $\frac{171}{63} - \frac{112}{63} = \frac{59}{63}$.
9. De $\frac{21}{8}$ subtrahir $\frac{18}{10}$. Resp. $\frac{105}{40} - \frac{72}{40} = \frac{33}{40}$.
10. De $\frac{23}{9}$ subtrahir $\frac{20}{11}$. Resp. $\frac{253}{99} - \frac{180}{99} = \frac{73}{99}$.

1. De $\frac{25}{10}$ subtrahir $\frac{22}{12}$. Resp. $\frac{5}{2} - \frac{11}{6} = \frac{15}{6} - \frac{11}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
2. De $\frac{27}{11}$ subtrahir $\frac{24}{13}$. Resp. $\frac{27}{11} - \frac{24}{13} = \frac{351}{143} - \frac{264}{143} = \frac{87}{143}$.
3. De $\frac{29}{12}$ subtrahir $\frac{26}{14}$. Resp. $\frac{29}{12} - \frac{13}{7} = \frac{203}{84} - \frac{156}{84} = \frac{47}{84}$.

Multiplicação de fracções

150. Na theorema primeiro e no quarto sobre fracções, ficou demonstrado que multiplicando-se o numerador ou dividindo-se o denominador de uma fracção por um numero inteiro, o valor da fracção fica multiplicado por esse numero. Daqui se conclue que podemos de dois modos multiplicar uma fracção por um numero inteiro

1.º Modo. Problema. Multiplicar $\frac{a}{b}$ por m .

Solução. Multiplique-se o numerador a por m , e divide-se o producto am pelo denominador b , e ficará $\frac{am}{b}$.

2.º Modo. Problema. Multiplicar $\frac{a}{b}$ por x .

Solução. Divide-se o denominador b por

Operação

quando o denominador se divide exactamente pela x , $x = \frac{b}{bx} \times x = \frac{b}{bx} = \frac{1}{x}$ quant. de inteira

Regra. Multiplica-se o numerador pela quantidade inteira, e o producto escreve-se sobre o denominador. Ou divide-se o denominador pela quantidade inteira, quando é divisivel por ella

Operar da seguinte maneira

Multiplicar $\frac{2a}{bx}$ por ad .

2. Multiplicar $\frac{ab}{cd}$ por e .

Multiplicar $\frac{ab}{cd}$ por d .

4. Multiplicar $\frac{a+b}{c}$ por xy .

Multiplicar $\frac{b-a}{d}$ por $b+c$.

Respostas

$$\frac{2ad}{bx}$$

$$\frac{abe}{cd}$$

$$\frac{abd}{cd}$$

$$\frac{ax+by}{c}$$

$$\frac{b^2+c^2}{d}$$

Multiplicar $\frac{3x}{10}$ por fy .

Multiplicar $\frac{4x}{2a+b}$ por $a-2b$

Multiplicar $\frac{b+c}{d+e}$ por a

Multiplicar $\frac{a+b}{c+d}$ por $c+d$.

Multiplicar $\frac{a}{b}$ por e .

Multiplicar $\frac{2a+3bx}{c+d}$ por ed .

Multiplicar $\frac{2x+3}{5}$ por $2ax$.

160. Multiplicar uma fracção por outra.

Problema. Multiplicar $\frac{a}{b}$ por $\frac{c}{d}$.

Solução. Multiplicar o numerador a pelo numerador c , e o denominador b pelo denominador d .

Operação

Operação

De modo que

o multiplicador não é e , e sim $\frac{e}{d}$ por isso, o producto $\frac{ae}{b}$ é d vezes maior do que deve ser. Multiplicando agora o denominador de $\frac{ae}{b}$ por d , torna-se d vezes menor o valor da fração, e então dará $\frac{ade}{bd}$ o producto pedido.

Regra. Multiplicam-se entre si os numeradores, de modo que se forma o numerador da fracção resultante da multiplicação.

Nota. Para se multiplicar uma fracção por um numero inteiro, reduz-se a fracção resultante a sua expressão mais simples.

Operar as seguintes simplificações

Resposta

Resposta

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{8} \\
 2. \quad & \frac{5}{6} \times \frac{2}{3} = \frac{5}{9} \\
 3. \quad & \frac{7}{8} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{10} \\
 4. \quad & \frac{9}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3}{4} \\
 5. \quad & \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{15} \\
 6. \quad & \frac{4}{7} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{14} \\
 7. \quad & \frac{6}{11} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{11} \\
 8. \quad & \frac{8}{9} \times \frac{3}{10} = \frac{4}{15} \\
 9. \quad & \frac{10}{12} \times \frac{6}{15} = \frac{1}{2} \\
 10. \quad & \frac{12}{15} \times \frac{5}{8} = \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

161. Quando os numeradores e denominadores têm factores comuns, cancelam-se esses factores antes da multiplicação, e, de este modo, obtém-se um produto já simplificado.

Problema. Qual é o produto de $\frac{3}{4}$ e $\frac{2}{5}$?

Solução. Como o factor 2 é comum ao numerador da primeira fracção e ao denominador da segunda, cancela-se este factor.

Operação

$$\frac{3}{4} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$$

Demonstração. Dividindo-se ambos os termos de uma fracção por um mesma quantidade, não se altera o seu valor (n.º 147). Ora a fracção é $\frac{b}{x} \times \frac{a}{b}$. Cancelando o factor b no numerador e no denominador, resta $\frac{a}{x}$. Logo, ao dividir estes dois termos por b , o mesmo se obtém, ou o factor b .

Problema. Multiplicar $\frac{9a}{15y}$ por $\frac{5b}{2x}$.

Solução. Decompondo-se os factores comuns

os factores com-

$$\frac{9a}{15y} \times \frac{5b}{2x} = \frac{3 \times 3 \times a}{3 \times 5 \times y} \times \frac{5 \times b}{2 \times x} = \frac{3ab}{2xy}$$

Divisão de fracções

162. A divisão de uma fracção por um numero inteiro ou duas fórmas, ou dividindo-se o numerador pelo divisor, ou multiplicando-se o denominador, como já foi demonstrado nas secções 141 e 142.

Vamos resolver quatro exemplos para o discipulo não ter dificuldade alguma nas operações.

1. Dividir $\frac{3}{4}$ por 2.

$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4 \times 2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$$

Regra. Divide-se o numerador pelo divisor, e se não for visível, multiplica-se o denominador pelo divisor, e escreve-se o numerador sobre o resultado.

$$1. \quad \frac{3}{4} \div 2 \text{ por } 3ab, \quad \frac{3}{4} \div 2 = \frac{3}{8}$$

$$2. \quad \text{Dividir } \frac{15a^2c^2}{16} \text{ por } 3a^2c, \quad \frac{15a^2c^2}{16} \div 3a^2c = \frac{5c}{16}$$

$$3. \quad \text{Dividir } \frac{14 \times 10^2}{1 \times 10} \text{ por } 7a^2m^2, \quad \frac{14 \times 10^2}{1 \times 10} \div 7a^2m^2 = \frac{2 \times 10}{a^2m^2}$$

$$4. \quad \text{Dividir } \frac{5a^2b^2}{15a^2b} \text{ por } 5b^2d, \quad \frac{5a^2b^2}{15a^2b} \div 5b^2d = \frac{1}{3d}$$

5. Dividir $\frac{x^2 + y^2}{3}$ por x .

6. Dividir $\frac{x^2 + y^2}{x}$ por $x + y$.

7. Dividir $\frac{x^2 + 2xy + y^2}{x^2 - y^2}$ por $x + y$.

8. Dividir $\frac{2a}{3b}$ por b .

9. Dividir $\frac{a}{b}$ por b .

10. Dividir $\frac{a}{b}$ por $a + b$.

11. Dividir $\frac{2x + 5y}{3x + 2y}$ por $2x - 3y$.

12. Dividir $\frac{b}{a^2 + a + b}$ por $a - b$.

183. Na divisão de uma fração por outra, há dois casos a considerar, que são:

- 1.º Quando as frações têm um denominador comum
- 2.º Quando as frações têm denominadores diferentes.

1.º Caso. Dividir $\frac{16a}{m}$ por $\frac{3a}{n}$.

Solução. Como as duas frações têm o denominador comum bastará só operar com os numeradores. Então $16a$ de a , isto é $16a$ contém 4 vezes $3a$ e por isso contém 4

Operação

12

2.º Caso. Dividir $\frac{a}{x}$ por $\frac{y}{z}$.

Solução. Desde que os denominadores são diferentes, devemos reduzi-los a um denom.

Operação

valor comum, e teremos:

Como as duas frações têm um denominador comum podemos fazer a operação só com os numeradores como no caso de uma $\frac{ay}{x}$.

ay

xy

Estendendo o quociente $\frac{ay}{xy}$, vemos que ele é composto de $\frac{a}{x} \times \frac{y}{y}$ isto é, o dividendo

multiplicado pelo divisor sendo este os termos invertidos. Daqui podemos formular uma só regra para os dois casos:

Regra. Para se dividir uma fração por outra, invertem-se os termos do divisor, e multiplicam-se as duas frações.

Nota. Se o dividendo ou o divisor for uma quantidade muito mais simples do que a fração (n.º 180), se proceder-se como na regra acima.

Se o dividendo for uma q. ar. inteira, assim da regra já exp. as potências também darão de inteiro o denominador 1 como $\frac{a}{1}$ e depois

1. Dividir $\frac{a}{3}$ por $\frac{2a}{5}$.

Resp.

2. Dividir $\frac{3a}{5}$ por $\frac{4a}{7}$.

2

3. Dividir $\frac{a^2b}{cd}$ por $\frac{ab}{d}$.

2

4. Dividir $\frac{a}{c}$ por $\frac{2a}{3c}$.

2

5. Dividir 4 por $\frac{a}{3}$.

2

6. Dividir 4 por $\frac{a}{6}$.

2

7. Dividir ab^2 por $\frac{2ab}{5a}$.

2

8. Dividir $\frac{6ax}{a}$ por $\frac{4x}{a}$.

2

9. Dividir $\frac{2a^2x}{a}$ por $\frac{3ax^2}{x}$.

2

10. Dividir $\frac{16ax}{a}$ por $\frac{4x}{16}$.

2

11. Dividir $\frac{a^2 + 4}{a}$ por $\frac{a - 4}{a}$.

2

12. Dividir $\frac{4 - a^2}{a}$ por $\frac{a - 4}{a}$.

2

13. Dividir $\frac{x^2 - 2xy + y^2}{ab}$ por $\frac{x - y}{bc}$.

2

14. Dividir $\frac{a^2 - b^2}{c}$ por $\frac{a + b}{c}$.

2

15. Dividir $5a^2 - \frac{1}{5}$ por $a + \frac{1}{5}$.

2

16. Dividir $\frac{7a^2 - 3a}{b}$ por $\frac{a - 3}{b}$.

2

EQUAÇÕES DO PRIMEIRO GRAU

164. Toda igualdade é composta de duas partes unidas pelo sinal $=$; a parte que está à esquerda deste signal, chama-se primeiro membro; e a que está à direita, chama-se segundo membro. Exemplos

$$x + 5 = 8$$

Ca la membro de uma igualdade pôde ter um ou mais termos precedidos pelos signaes $+$ ou $-$; assim, na igualdade acima, o primeiro membro tem tres termos, e o segundo tem dois

Dentre as igualdades precisamos, em Algebra, distinguir as identidades e as equações. A igualdade é uma identidade si ella persiste quaesquer que sejam os valores attribuidos ás suas letras. Por exemplo: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ é uma identidade, pois a igualdade subsiste para qualquer valor que se dê a a e b . Já $x - 5 = 8$ é uma equação, pois a igualdade só fica satisfeita dando-se a x o valor 8. A equação existe, portanto, quando a igualdade só se satisfaz dando se ás letras determinados valores. Costuma-se, para indicar a identidade, separar os seus dois membros, pelo signal

165. Em uma equação ha geralmente quantidades conhecidas e quantidades desconhecidas. As quantidades conhecidas são representadas por numeros ou pelas primeiras letras do alphabeto, a, b, c , etc.; e as quantidades desconhecidas são representadas pelas ultimas letras x, y e z .

166. As equações distinguem-se pelos seus diversos graus

Equação do 1.º grau é a que contém uma só quantidade desconhecida na sua primeira potencia, isto é, com o expoente 1 subentendida, pois x ou x^1 exprime a primeira potencia da quantidade x . Assim, $2x + 5 = 9$ é uma equação do primeiro grau

Equação do 2.º grau é a que contém uma quantidade desconhecida na segunda potencia, isto é, com expoente 2. Assim $4x^2 - 7 = 20$ é uma equação do 2.º grau

167. Quando uma equação contém mais de uma quantidade desconhecida, o seu grau é igual à maior somma dos expoentes das quantidades desconhecidas em qualquer termo.

168. Conhece-se o grau de uma equação pelo maior ex-
nente da incognita, quando ha uma só, ou pela maior somma
e expoentes das incognitas em qualquer termo, quando ha
mais de uma

Agora trataremos sómente das equações do 1.º grau, depois exporemos as outras circunstancialmente

169. Ha seis proposições que precisamos conhecer para
mais facilmente comprehendermos as transformações que,
muitas vezes é necessario operar em uma equação

Estas proposições, por serem exauctas e não precisarem
de demonstração, chamam-se tambem, axiomas

1.º Se a duas quantidades iguaes, a mesma quantidade fór
adicionada, as duas sommas serão iguaes

2.º Se de duas quantidades iguaes, a mesma quantdade
fór subtrahida, os dois restos serão iguaes

3.º Se duas quantidades iguaes forem multiplicadas pelo
mesmo factor, os dois productos serão iguaes

4.º Se duas quantidades iguaes divididas pelo mesmo di-
visor, os dois quocientes serão iguaes

5.º Se duas quantidades iguaes forem elevadas á mesma
potencia, os dois resultados serão iguaes.

6.º Se a mesma raiz fór extrahida de duas quantidades
iguaes, os dois resultados serão iguaes.

170. Estas seis proposições ou axiomas podem ser re-
duzidas a uma só, a saber, Se fizermos a mesma operação em
duas quantidades iguaes, os resultados serão iguaes. Daqui
podemos deprehender que, se um membro de uma equação
passar por alguma modificação, e o outro membro passar por
uma modificação identica, os dois membros continuão em
igualdade

171. Verificar uma equação é reconhecer a igualdade
entre seus membros.

quizermos verificar uma equação, substituiremos as
quantidades desconhecidas pelos seus valores numericos, o
resultado nos dois membros fór igual, a equação estará
verificada. Exemplo: Verificar a equação $10 + 8 = 18 + 4$
Substituiremos a letra x por 5, e a letra a por 4, teremos

$$\begin{array}{rcl} 10 + 8 & = & 18 + 4 \\ 18 & = & 18 \end{array}$$

Esta verificação pôde ser effectuada, depois de termos
achado o valor das quantidades desconhecidas.

Transformação das equações

172. Transformar uma equação é mudar a sua forma sem alterar a igualdade entre os seus membros.

173. Resolver uma equação é achar o valor da quantidade desconhecida que satisfaz a equação.

174. As operações que se podem fazer para transformar uma equação em outra são as seguintes:

1. Transpor os termos de um membro para o outro.
2. Multiplicar ou dividir os membros da equação por uma mesma quantidade.
3. Elevar ou reduzir a potências os membros da equação.
4. Extrair a raiz dos membros da equação.

Introduzir uma equação

175. Quando nos dá mais termos de uma equação são chamadas equações de 1.ª, 2.ª, 3.ª, etc. ordem. A equação de 1.ª ordem é a seguinte:

Problema. Introduzir a seguinte equação $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$.

Solução.

Operação

Para introduzir a equação $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$, vamos multiplicar os membros da equação por 6.

Assim a equação $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = 5$ pode ser transformada na equação $3x + 2x = 30$, que é a equação de 1.ª ordem.

Problema. Introduzir a equação $\frac{x}{ab} + \frac{x}{ba} = d$.

Solução.

Para introduzir a equação $\frac{x}{ab} + \frac{x}{ba} = d$, vamos multiplicar os membros da equação por ab .

Assim a equação $\frac{x}{ab} + \frac{x}{ba} = d$ pode ser transformada na equação $x + x = abd$.

Assim a equação $x + x = abd$ pode ser transformada na equação $2x = abd$.

Operação

$$\frac{abx}{ab} + \frac{bax}{ba} = abd$$

$$x + x = abd$$

Regra.

Para introduzir a equação $\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$, vamos multiplicar os membros da equação por ab .

Problema

$$4x - 3x = 24.$$

$$1. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

$$2. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

$$3. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

$$4. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

$$5. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

$$6. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

$$7. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

$$8. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

$$9. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

$$10. \quad \frac{x}{2} - \frac{x}{3} = 2$$

Transpor os termos de uma equação

176. Quando nos dá os membros de uma equação com termos conhecidos e desconhecidos, transpõem-se os termos desconhecidos para o primeiro membro, e os conhecidos para o segundo.

Problema. Transpor os termos da equação $3x - 5 = 14x$.

Solução. Nesta equação vamos transpor $14x$.

Operação

Para transpor $14x$, vamos pôr o sinal de menos para o termo $14x$.

Assim a equação $3x - 5 = 14x$ pode ser transformada na equação $3x - 14x - 5 = 0$.

Assim a equação $3x - 14x - 5 = 0$ pode ser transformada na equação $-11x - 5 = 0$.

Assim a equação $-11x - 5 = 0$ pode ser transformada na equação $-11x = 5$.

Assim a equação $-11x = 5$ pode ser transformada na equação $x = -\frac{5}{11}$.

Assim a equação $x = -\frac{5}{11}$ pode ser transformada na equação $x = -\frac{5}{11}$.

Assim a equação $x = -\frac{5}{11}$ pode ser transformada na equação $x = -\frac{5}{11}$.

Assim a equação $x = -\frac{5}{11}$ pode ser transformada na equação $x = -\frac{5}{11}$.

Assim a equação $x = -\frac{5}{11}$ pode ser transformada na equação $x = -\frac{5}{11}$.

Assim a equação $x = -\frac{5}{11}$ pode ser transformada na equação $x = -\frac{5}{11}$.

Assim a equação $x = -\frac{5}{11}$ pode ser transformada na equação $x = -\frac{5}{11}$.

Assim a equação $x = -\frac{5}{11}$ pode ser transformada na equação $x = -\frac{5}{11}$.

Assim a equação $x = -\frac{5}{11}$ pode ser transformada na equação $x = -\frac{5}{11}$.

Nas equações acima dadas, a incógnita aparece em todos os termos da equação. Portanto, para resolvê-las, devemos reduzir cada membro da equação a um único termo que contenha a incógnita.

1. $3x + 6 = 8 + 2x + 3$.	Resposta	Se $2x = 3 + 6 - 3$.
2. $4x + 1 = 5 + 3x$.	1	
3. $4x - 1 = 2x + 4$.	1	
4. $9x + 1 = 10 + 4x$.	2	$5x = 10 - 1$
5. $ax + d = 10 + b$.	2	$ax = 10 + b - d$

Redução de termos semelhantes

177. Depois de transformarmos os termos de uma equação, precisamos reduzir em cada membro todas as termos semelhantes para achar o valor da incógnita.

1. Problema. Qual o valor de x na equação $3x + 6 = 8 + 2x + 3$?

Solução. O primeiro termo do primeiro membro pode ser reduzido ao primeiro termo do segundo membro.

Transformando a equação, temos:

2. Problema. Achar o valor de x na equação $3x + 6 = 8 + 2x + 3$.

Operação

Solução. Reduzindo os termos semelhantes em cada membro, temos:

$$x = 5$$

178. Para resolver uma equação literal, temos de fazer as vezes alguma coisa com a incógnita ou com a letra. Assim, na equação $ax + b = c$, se dividirmos ambos os termos por a , teremos $x + \frac{b}{a} = \frac{c}{a}$ e reduzindo agora $\frac{b}{a}$ a um só termo, temos a equação $x = \frac{c}{a} - \frac{b}{a}$.

3. Problema. Qual o valor de x na equação $ax + b = c$?

Operação

Solução. O primeiro termo do primeiro membro pode ser reduzido ao primeiro termo do segundo membro.

Nota. Na prática não precisamos estar reduzindo a divisão de ambos os membros para se obter a solução da equação, com efeito, subtraímos de ambos os membros a mesma quantidade, e assim obtemos a mesma equação. Assim, na equação $ax + b = c$, se subtraímos b de ambos os membros, obtemos $ax = c - b$, e daí $x = \frac{c - b}{a}$.

179. Para formularmos a regra completa para a solução das equações, vamos resolver o seguinte problema:

4. Problema. Qual o valor de x na equação $\frac{3x}{4} = 4$?

Solução. A equação é:

Transformando a equação, temos:

Regra geral para a solução

- I. Isolamos os termos fraccionarios da equação.
- II. Transpõem-se todas as quantidades conhecidas para um dos membros, e as desconhecidas para o outro.
- III. Reduz-se cada membro da equação à sua forma mais simples, e depois dividimos os dois membros pelo coeficiente da quantidade desconhecida.

Resolvendo a equação, temos:

1. $3 = 2x + 7$.	Resp. $x = 12$.
$3x - 8 = 16 + 5x$.	$x = 3$.
$5x + 7 = 3x + 5$.	$x = 11$.
$3x + 25 = -x - 9$.	$x = 4$.
$15 - 2x = 3x - 25$.	$x = 8$.
$5(x + 1) + 0(x - 2) = 0(x + 3)$.	$x = 5$.
$4(5x - 3) - 0(3 - x) + 8(12x - 1) = 0$.	$x = 0$.
$10(x + 5) + 8(x + 4) = 6(x - 3) + 121$.	$x = 8$.
	$x = 10$.
	$x = 12$.
	$x = 3$.
	$x = 24$.

13. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
14. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
15. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
16. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
17. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
18. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
19. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
20. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
21. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
22. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
23. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
24. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
25. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
26. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
27. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
28. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
29. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
30. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
31. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
32. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
33. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
34. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
35. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
36. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
37. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
38. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
39. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
40. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
41. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
42. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
43. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
44. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
45. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
46. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
47. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
48. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
49. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$
50. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$ $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$

PROBLEMAS

180. Problema algebrico é uma questão para resolver, na qual se dá uma ou mais quantidades conhecidas chamadas dados, e se requer uma ou mais quantidades desconhecidas chamadas incógnitas.

181. Resolver um problema é obter a solução para as incógnitas conhecidas.

182. A solução algebrica de um problema consta de duas partes que são:

A primeira é a formação da equação que consiste em exprimir em linguagem algebrica a relação que ha entre quantidades desconhecidas e os dados do problema.

A segunda é a solução da equação, isto é, achar o valor da incógnita.

183. A primeira parte é geralmente a mais difficil. Não é possível formular uma regra precisa e clara que habilite o discípulo a traduzir promptamente o enunciado de um problema, em uma equação algebrica; o proprio discípulo com o seu raciocínio é quem tem de formar a equação, segundo a natureza dos dados offerecidos para o calculo.

Não é uma de facil intuição, e que podem ser resolvidas, mas que só a o via de um esforço achar um modo de as deslizar em

e porque com alguma appli-

o não poder formar a equação o repita as tentativas até ficar se-
do o esforço e fadiga que der ao factoribus para re-
gulará em dos grandes proveitos o primeiro é ad-aptar-se em resolver
f-eficemente os problemas da Algebra, q que é já uma boa recompensa; e

segundo é desenvolver as duas expressões dadas, pois sendo elas iguais, a primeira parte não se altera e a segunda parte se altera, mas a igualdade permanece a mesma, pois a igualdade é transitiva.

A regra é parte da solução dos problemas, pois sendo ela conhecida, a primeira parte não se altera e a segunda parte se altera, mas a igualdade permanece a mesma, pois a igualdade é transitiva.

184. A primeira coisa que o discípulo tem de fazer para resolver um problema, é compreender perfeitamente o enunciado, isto é, conhecer a natureza e todas as condições da questão para poder exprimi-las e a linguagem algébrica em uma equação. A direcção geral para este processo é a seguinte:

Regra. Representam-se as incógnitas com as últimas letras do alfabeto.

Exprime-se em linguagem algébrica as relações que ha entre as quantidades conhecidas e as incógnitas de sorte que a equação formada satisfaça as condições do problema.

Resolve-se depois a equação.

185. Vamos agora resolver alguns problemas para mostrar aos discípulos o modo por que devem dirigir o seu raciocínio nestes processos algébricos.

I Problema. A somma de dois números é 180, e o maior é o dobro do menor; quaes são os números?

Solução. Seja x o menor, e $2x$ o maior, pois o maior é o dobro do menor. A somma dos dois números é 180, logo $x + 2x = 180$. Logo $3x = 180$. Logo $x = 60$. Logo $2x = 120$. Logo os números são 60 e 120.

Verificação. O resultado da solução é verificado.

II Problema. Um pai disse a seu filho: «A differença das nossas idades é 48 annos, e eu sou cinco vezes a tua idade». Quaes eram as duas idades?

Solução. Seja x a idade do filho, e $5x - 48$ a idade do pai. A differença das idades é 48, logo $5x - 48 - x = 48$. Logo $4x = 96$. Logo $x = 24$. Logo a idade do filho é 24 annos, e a idade do pai é 120 annos.

Verificação. $120 - 24 = 96$.

Equação

$$x + 2x = 180$$

$$3x = 180$$

$$x = 60$$

$$2x = 120$$

Equação

$$5x - 48 - x = 48$$

$$4x = 96$$

$$x = 24$$

$$5x - 48 = 120$$

III Problema. Qual é o numero que, juntado-a-lhe um terço do si mesmo, ficará 24?

Solução. Seja x o numero, então um terço de x é $\frac{x}{3}$.

Equação

A equação será $x + \frac{x}{3} = 24$.

Logo $\frac{4x}{3} = 24$. Logo $4x = 72$. Logo $x = 18$.

Verificação. $18 + 6 = 24$.

IV Problema. Qual é o numero que, juntado-a-lhe metade de si mesmo, o do resultado subtrahido-se dois terços do mesmo numero, restará 105?

Solução. Seja x o numero, então a metade de x é $\frac{x}{2}$, e dois terços de x são $\frac{2x}{3}$.

Equação

A equação será $x + \frac{x}{2} - \frac{2x}{3} = 105$.

Logo $\frac{6x + 3x - 4x}{6} = 105$. Logo $\frac{5x}{6} = 105$. Logo $5x = 630$. Logo $x = 126$.

Verificação. $126 + 63 - 84 = 105$.

V Problema. Dêdite uma linha de 25 centímetros de comprimento em duas partes, de sorte que a maior tenha 3 centímetros mais do que a menor.

Equação

Solução. Seja x a parte menor, e $x + 3$ a parte maior. A somma das duas partes é 25. Logo $x + x + 3 = 25$. Logo $2x + 3 = 25$. Logo $2x = 22$. Logo $x = 11$. Logo a parte menor é 11, e a parte maior é 14.

$$x + x + 3 = 25$$

$$2x + 3 = 25$$

$$2x = 22$$

$$x = 11$$

$$x + 3 = 14$$

VI Problema. B recebe 5\$ mais do que A, e C recebe 7\$000 mais do que B.

Solução. Seja x a parte de A, então a parte de B será $x + 5$, e a parte de C será $x + 5 + 7 = x + 12$. A somma das partes é 51\$. Logo $x + x + 5 + x + 12 = 51$. Logo $3x + 17 = 51$. Logo $3x = 34$. Logo $x = 11\frac{2}{3}$. Logo a parte de A é 11\$ e 2/3, a parte de B é 16\$ e 2/3, e a parte de C é 19\$ e 2/3.

Equação

$$x + x + 5 + x + 12 = 51$$

$$3x + 17 = 51$$

$$3x = 34$$

$$x = 11\frac{2}{3}$$

$$x + 5 = 16\frac{2}{3}$$

$$x + 12 = 19\frac{2}{3}$$

VII Problema. Qual é o numero que sendo subtrahido da sua terça parte, a somma será igual a sua metade mais 10?

Solução. Se x é o número pedido: então o número com a sua terça parte é $x + \frac{x}{3}$, e a metade do número com mais 10 é $\frac{x}{2} + 10$.

A equação será $x + \frac{x}{3} = \frac{x}{2} + 10$.

Logo vem a equação seguinte que o valor de x é 12.

Verificação. $12 + 4 = 16 + 10$

VIII Problema. Um tanque tinha água até a terça parte da sua altura; lançando-se dentro delle 17 barris de água, ficou cheia a metade do tanque; quantos barris levava o tanque?

Solução. Se x é o número de barris de água o tanque tinha que um terço do número mais 17 é igual a metade do tanque, então

A equação será $\frac{x}{3} + 17 = \frac{x}{2}$.

O valor de x é 62, que é o número de barris que leva o tanque.

Como os dois termos tem o signal menos,

passo com o signal mais.

Verificação

IX Problema. A somma de dois numeros é 67, e a sua differença é 19; quaes são os dois numeros?

Solução. Seja x o numero que nos dá $x + 19$ no 4.º membro

A equação será $x + x + 19 = 67$

O valor de x é 24. Logo a somma dos numeros é 67, e o maior é $x + 19 = 43$.

Verificação. $24 + 43 = 67$.

Outra solução. Seja x o numero maior, e y o menor

Logo a equação de soma é $x + y = 67$

E a equação de differença é $x - y = 19$, e o numero menor que é $y = 24$.

X Problema. Um fazendeiro contractou um empregado por 30 dias, dando-lhe 25 tostões e comida em cada dia que trabalhasse, e cobrando-lhe 20 tostões pela comida em cada dia que vadiasse. No fim do tempo, o empregado recebeu 300 tostões; quantos dias trabalhou elle, e quantos dias vadiou?

Equação

$$\begin{aligned} x + \frac{x}{3} &= \frac{x}{2} + 10 \\ 6x + 2x &= 3x + 60 \\ 6x - 3x &= 60 - 2x \\ 3x &= 60 \\ x &= 20 \end{aligned}$$

Equação

$$\begin{aligned} x + x + 19 &= 67 \\ 2x &= 67 - 19 \\ 2x &= 48 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Equação

$$\begin{aligned} x + x + 19 &= 67 \\ 2x &= 67 - 19 \\ 2x &= 48 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + x - 19 &= 67 \\ 2x &= 67 - 19 \\ 2x &= 48 \\ x &= 24 \end{aligned}$$

Solução. Seja x o numero de dias que trabalhou.

Logo o numero de dias que não trabalhou é $30 - x$.

O valor de x é 24, e o numero de dias que não trabalhou é 6. Logo a somma dos dias que trabalhou e não trabalhou é 30, e o valor de x é 24.

Verificação. 24 dias a 25 tostões = 600 tostões
6 dias a 20 tostões = 120 tostões
Total = 720 tostões

Nota. Depois de 48 horas em testes para facilitar a solução, a dificuldade agora poderá subsistir 15 testes por 2500, e 30 testes por 2500.

XI Problema. Duas locomotivas partiram ao mesmo tempo dos extremos de uma linha ferrea de 210 kilometros de extensão; uma movia-se com a velocidade de 40 kilometros por hora, e a outra com a velocidade de 30. Quantas horas gastaram para se encontrar?

Solução. Seja x o numero das horas que cada uma locomotiva anda 40 kilometros por hora, em x horas andou $40x$. A outra locomotiva, por semelhança razão, andou $30x$. Como a linha tem 210 kilometros a equação é $40x + 30x = 210$. Resolvida a equação achamos que o valor de x é 3, ou seja, as locomotivas gastaram 3 horas para se encontrar.

Se o problema não de pedir o numero de horas, podemos também resolver a equação $40x + 30x = 210$, e achamos que o valor de x é 3.

A outra velocidade é 30, e a outra velocidade é 40, e a outra velocidade é 30, e a outra velocidade é 40.

Logo a equação de soma é $x + y = 67$, e a equação de differença é $x - y = 19$, e o numero menor que é $y = 24$.

XII Problema. De uma estação saiu um trem mixto correndo 20 milhas por hora; 3 horas depois, saiu o trem expresso na mesma direcção, andando 25 milhas por hora. Em quantas horas este alcançou aquelle?

[illegible]

Ex. 10.5.2

Verfuehle ☐ andere Hoer

0 10 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 101 102 103 104 105 106 107 108 109 110 111 112 113 114 115 116 117 118 119 120 121 122 123 124 125 126 127 128 129 130 131 132 133 134 135 136 137 138 139 140 141 142 143 144 145 146 147 148 149 150 151 152 153 154 155 156 157 158 159 160 161 162 163 164 165 166 167 168 169 170 171 172 173 174 175 176 177 178 179 180 181 182 183 184 185 186 187 188 189 190 191 192 193 194 195 196 197 198 199 200 201 202 203 204 205 206 207 208 209 210 211 212 213 214 215 216 217 218 219 220 221 222 223 224 225 226 227 228 229 230 231 232 233 234 235 236 237 238 239 240 241 242 243 244 245 246 247 248 249 250 251 252 253 254 255 256 257 258 259 260 261 262 263 264 265 266 267 268 269 270 271 272 273 274 275 276 277 278 279 280 281 282 283 284 285 286 287 288 289 290 291 292 293 294 295 296 297 298 299 300 301 302 303 304 305 306 307 308 309 310 311 312 313 314 315 316 317 318 319 320 321 322 323 324 325 326 327 328 329 330 331 332 333 334 335 336 337 338 339 340 341 342 343 344 345 346 347 348 349 350 351 352 353 354 355 356 357 358 359 360 361 362 363 364 365 366 367 368 369 370 371 372 373 374 375 376 377 378 379 380 381 382 383 384 385 386 387 388 389 390 391 392 393 394 395 396 397 398 399 400 401 402 403 404 405 406 407 408 409 410 411 412 413 414 415 416 417 418 419 420 421 422 423 424 425 426 427 428 429 430 431 432 433 434 435 436 437 438 439 440 441 442 443 444 445 446 447 448 449 450 451 452 453 454 455 456 457 458 459 460 461 462 463 464 465 466 467 468 469 470 471 472 473 474 475 476 477 478 479 480 481 482 483 484 485 486 487 488 489 490 491 492 493 494 495 496 497 498 499 500 501 502 503 504 505 506 507 508 509 510 511 512 513 514 515 516 517 518 519 520 521 522 523 524 525 526 527 528 529 530 531 532 533 534 535 536 537 538 539 540 541 542 543 544 545 546 547 548 549 550 551 552 553 554 555 556 557 558 559 560 561 562 563 564 565 566 567 568 569 570 571 572 573 574 575 576 577 578 579 580 581 582 583 584 585 586 587 588 589 590 591 592 593 594 595 596 597 598 599 600 601 602 603 604 605 606 607 608 609 610 611 612 613 614 615 616 617 618 619 620 621 622 623 624 625 626 627 628 629 630 631 632 633 634 635 636 637 638 639 640 641 642 643 644 645 646 647 648 649 650 651 652 653 654 655 656 657 658 659 660 661 662 663 664 665 666 667 668 669 670 671 672 673 674 675 676 677 678 679 680 681 682 683 684 685 686 687 688 689 690 691 692 693 694 695 696 697 698 699 700 701 702 703 704 705 706 707 708 709 710 711 712 713 714 715 716 717 718 719 720 721 722 723 724 725 726 727 728 729 730 731 732 733 734 735 736 737 738 739 740 741 742 743 744 745 746 747 748 749 750 751 752 753 754 755 756 757 758 759 760 761 762 763 764 765 766 767 768 769 770 771 772 773 774 775 776 777 778 779 780 781 782 783 784 785 786 787 788 789 790 791 792 793 794 795 796 797 798 799 800 801 802 803 804 805 806 807 808 809 810 811 812 813 814 815 816 817 818 819 820 821 822 823 824 825 826 827 828 829 830 831 832 833 834 835 836 837 838 839 840 841 842 843 844 845 846 847 848 849 850 851 852 853 854 855 856 857 858 859 860 861 862 863 864 865 866 867 868 869 870 871 872 873 874 875 876 877 878 879 880 881 882 883 884 885 886 887 888 889 890 891 892 893 894 895 896 897 898 899 900 901 902 903 904 905 906 907 908 909 910 911 912 913 914 915 916 917 918 919 920 921 922 923 924 925 926 927 928 929 930 931 932 933 934 935 936 937 938 939 940 941 942 943 944 945 946 947 948 949 950 951 952 953 954 955 956 957 958 959 960 961 962 963 964 965 966 967 968 969 970 971 972 973 974 975 976 977 978 979 980 981 982 983 984 985 986 987 988 989 990 991 992 993 994 995 996 997 998 999 1000 1001 1002 1003 1004 1005 1006 1007 1008 1009 1010 1011 1012 1013 1014 1015 1016 1017 1018 1019 1020 1021 1022 1023 1024 1025 1026 1027 1028 1029 1030 1031 1032 1033 1034 1035 1036 1037 1038 1039 1

Eq. (44)

[illegible]

Cada uno podrá ahora resolver sus dif. dudas en un pxe. pro.

13. Div. br 12 acend. nas entre Julio e Jose, de sorte que
 Jon reciba a 1/3 br e lus de Julio. Resp. Julio 13, José 28.

14. Dividir o número 18 em três partes, de sorte que a segunda parte seja o dobro da primeira, e a terceira tres vezes a do a primeira.

3. Dividir o número 60 em três partes, de sorte que a segunda parte tenha, três vezes a primeira, e a terceira a metade da segunda.

16. Um meio, um terço e um quarto de certo número somam 65. Qual é o número? Resp. 170

17. Dividir 88 libras esterlinas entre A, B e C, dando B $\frac{3}{4}$ e a C $\frac{2}{3}$ da parte de A. Resp. A=12, B. 28 e C. 1

18. Dividir o número 32 em duas partes, de sorte que :
maior tenha mais 6 do que o menor. Resp. 13 e 19

19 O numero inteiro de empregados de uma fabrica é 900 pessoas; o numero de meninos é o dobro do numero de homens, e o numero de mulheres é 11 vezes o numero de meninos. Achar o numero de homens, de meninos e de mulheres.

20. Um negociante comprou quantidades iguais de farinha de duas sortes, uma a 8\$ cada sacca, e a outra a 10\$, importando a farinha em 1988, quantas saccas comprou?

21. Do triplo de certo numero subtrahindo 17, resta 22;
achar o numero, Resp. 22;

22 Duas pessoas estando separadas pela distancia de 4200 kilometros, tomaram ás mesmas horas os trens expressos para onde se tinham de encontrar, andando uma 10 kilometros por hora, e a outra 30. Quantas horas passaram a para se encontrarem?

23. Dividir uma linha de 28 centímetros em duas partes, de sorte que uma tenha $\frac{7}{8}$ da outra. Resp. 12 e 16.

21) A soma de dois números é 200, e a sua diferença é 50. Quais são os números? Resp. 125 e 75

25. A soma de dois números é 100, e a sua diferença é 70, quais são os números?

24. A somma de dois números é $\frac{1}{2}$ e a sua diferença $\frac{1}{3}$. quaes são os números? Resp. $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{3}$.

27. Albano disse a sua irmã: «Eu tenho o dobro da tua idade, e, se eu tivesse mais 16 anos, teria três vezes os teus anos». Qual era idade de cada um?

28. A soma das idades de A, B e C é 109 an. os. B é 3
anos mais novo do que A, e 5 anos mais velho do que C.
Quais são as suas idades?

29. Qual é o número que se $\frac{1}{5}$ do si mesmo lhe forem juntos e aliado mais 26, a somma será igual a 5 vezes o mesmo numero?

202 • Quanto tinha elle?

31 Um pai de família morreu deixando 6.666\$ para serem divididos por sua viúva, 2 filhos e 3 filhas, de sorte que cada filho recebesse o dobro da parte de cada filha, e a viúva recebesse 100\$ menos do que o total que recebessem todas as filhas. Perguntase qual é a parte da viúva, a parte de cada filho, e a de cada filha.

32 Em uma eleição o número de votos que tiveram dois
candidatos foi 250 votos, tendo o candidato eleito uma maioria
de 50 votos, quantos teve cada um? Resp. 150 e 100

33. Qual é o número que, se for multiplicado por 7, e ao produto se adicionar 3, e depois dividir tudo por 2, e deste quociente subtrair 4, restará 15? Resp. 5

34. Um negociante foi à Capital comprar alguns generos
No primeiro dia gastou $\frac{1}{2}$ do seu dinheiro; no segundo dia $\frac{1}{4}$
no terceiro dia $\frac{1}{8}$ no quarto dia $\frac{1}{16}$ e então restavam-lhe só
300000. Quanto tinha elle quando chegou? Resp. 6 00000

35. Um pintor foi contratado para trabalhar 28 dias em uma obra, com a condição de receber 78500 em cada dia que trabalhasse, e de pagar 24500 em cada dia que não compa-

não podemos saber queres são os verdadeiros valores que x e y representam. Quando, pois, o número das quantidades desconhecidas é maior do que o número das equações, o problema é indeterminado, quer dizer, pode ter muitas soluções.

Mas, se com a equação $x+y=12$ tivermos outra equação auxiliar que seja simultânea com ella, isto é, que tenha as mesmas incógnitas, e os valores por o por exacto, a solução será única. Por exemplo, se tivermos a equação $x-y=7$, a solução será única. Se, com a equação $x+y=12$ tivermos a equação $x-y=7$, a solução será única. Se, com a equação $x+y=12$ tivermos a equação $x-y=7$, a solução será única.

188. Os problemas que têm mais de uma quantidade desconhecida, mas que se reduzem a uma equação simples com uma só incógnita.

189. Chama-se **eliminação** o processo que tem por fim combinar duas equações de modo a obter uma equação simples com uma só incógnita.

190. Estudaremos tres methodos ou modos de eliminação:

- 1.º Eliminação pela redução ao mesmo coefficiente.
- 2.º Eliminação por comparação.
- 3.º Eliminação por substituição.

Eliminação pela redução ao mesmo coefficiente

191. A eliminação pela redução ao mesmo coefficiente consiste em multiplicar ou dividir uma ou ambas as equações de modo a obter o mesmo coefficiente para uma das incógnitas. Depois disso, subtrahimos a equação resultante da outra, obtendo-se uma equação simples com uma só incógnita.

Problema. Qual é o valor de x e de y nas equações simultâneas $2x+y=15$ e $3x-y=5$?

Solução. Se tomo o coefficiente de y igual a 1 em ambas as equações (n.º 22), mas tendo os coefficients diferentes, isto é, sendo um 1 e outro -1, eliminamos a y subtrahindo a segunda equação da primeira (n.º 51). O resultado da adição é $x=20$ donde $y=7$.

O valor de x pôde ser achado, substituíndo $y=7$ na 1.ª equação o termo $2x$ pôde ser respectivo que é 8, a equação ficará $8+7=15$ ou $15=15$.

Problema. Achar o valor de x e de y nas equações simultâneas $3x+2y=34$ e $x+2y=22$

$$\begin{array}{rcl} \text{Equação} & & \\ 3x+2y & = & 34 \quad (1^\circ) \\ x+2y & = & 22 \quad (2^\circ) \end{array}$$

192. Nos dois problemas que acabamos de resolver, a primeira incógnita tem coefficientes iguaes e as equações simultâneas; mas quando tem signaes iguaes, eliminamos a incógnita subtrahindo.

Passemos agora a considerar o caso em que os coefficients das incógnitas são diferentes.

Problema. Qual é o valor de x e de y nas equações simultâneas $4x+3y=37$ e $3x-5y=8$?

$$\begin{array}{rcl} \text{Equação} & & \\ 4x+3y & = & 37 \quad (1^\circ) \\ 3x-5y & = & 8 \quad (2^\circ) \end{array}$$

Para igualarmos os coefficients de x temos de multiplicar a 1.ª equação por 3 e a 2.ª por 4, ficando assim:

$$\begin{array}{rcl} 12x+9y & = & 111 \quad (3^\circ) \\ 12x-20y & = & 32 \quad (4^\circ) \end{array}$$

Subtrahindo a 4.ª da 3.ª, obtemos:

$$29y = 79 \quad y = 2.72$$

Substituindo y na 1.ª equação, obtemos:

$$4x+3(2.72) = 37 \quad 4x = 31.36 \quad x = 7.84$$

Substituindo agora na 1.ª equação $3y$ por $9y$, obtemos:

Regra. Multiplica-se ou divide-se uma ou ambas as equações de modo a obter o mesmo coefficiente para uma das incógnitas. Depois disso, subtrahimos a equação resultante da outra, obtendo-se uma equação simples com uma só incógnita.

193. Quando os coefficients das incógnitas são diferentes, e as equações simultâneas, a eliminação se faz multiplicando-se as duas equações, e se forem iguaes, subtrahese.

Achar o valor de x e y nas seguintes equações pelo método da redução ao mesmo coeficiente

1. $3x + 2y = 12$ Resp. $x=4$
2. $5x + 7y = 43$ Resp. ?
3. $11x + 9y = 66$
4. $8x + 21y = 33$ " ?
5. $6x + 35y = 177$
6. $21y + 20x = 165$ " ?
7. $17y + 30x = 215$
8. $11x + 10y = 14$ " ?
9. $\frac{x}{5} + \frac{y}{10} = 2$ " ?

Eliminação por comparação

193. A eliminação por comparação consiste em achar o valor da mesma incógnita em termos da outra nas duas equações, e depois pela comparação dos dois valores, formar uma equação simples, como vamos ver na seguinte solução:

Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x+y=16$

Solução. O valor de x na primeira equação é $x=16-y$.
 Na segunda equação o valor de x é $14-y$.
 Como x tem o mesmo valor em ambas as equações, segue-se que $16-y=14-y$.
 Resolvendo esta equação, vemos que $y=1$.
 Substituindo $y=1$ na primeira equação, vemos que $x=15$.

Regra. Acha-se em cada equação o valor da incógnita que se quer eliminar, exprimindo o seu valor em termos das outras quantidades.

Forma-se uma nova equação destes valores iguais, e resolve-se como uma equação simples.

O discípulo deve resolver as seguintes equações simultâneas, eliminando a incógnita pelo método de comparação.

1. $x+y=12$ Resp. $x=8$
2. $2x+2y=36$ Resp. $x=12$
3. $3x+3y=18$ Resp. $x=18$
4. $4x+3y=13$ Resp. ?
5. $3x+2y=118$ Resp. ?
6. $4x+5y=23$ Resp. ?

Eliminação por substituição

194. A eliminação por substituição consiste em achar em uma equação o valor de uma incógnita em termos das outras quantidades, e depois substituir na outra equação aquela incógnita por seu valor achado.

Problema. Qual é o valor de x e y nas equações simultâneas $x+2y=17$ e $2x+3y=28$?

Solução. Na primeira equação x é igual a $17-2y$. Substituindo na 2ª equação x por $17-2y$, vemos que $2(17-2y)+3y=28$.
 Resolvendo esta equação, vemos que $y=6$.
 Substituindo agora na 1ª equação y por 6 , vemos que $x+12=17$, e portanto $x=5$.

Regra. Acha-se em uma equação o valor de uma incógnita, e na outra equação substitui-se esta incógnita pelo valor achado e depois resolve-se como na equação simples.

Achar pelo método de substituição os valores de x e y nas seguintes equações:

1. $x+y=12$ Resp. ?
2. $2x+2y=36$ Resp. ?
3. $3x+3y=18$ Resp. ?

Problemas com duas incógnitas

195. Agora, que o discípulo já sabe resolver equações simultâneas com duas quantidades desconhecidas, poderá também resolver os problemas que apresentarem o mesmo número de incógnitas.

1º Problema. A soma de dois números é 25, e a sua diferença é igual a 9; quaes são os números?

mente o dobro da idade de Elias. Quaes são as suas idades?

Resp. Samuel 40 e Elias 21

17. Dividir o numero 75 em duas partes, de modo que tres vezes a maior exceda 15 a sete vezes a menor. Quaes são as partes?

Resp. 7

18. Achar dois numeros tales que a somma de cinco vezes o primeiro e duas vezes o segundo seja 10, e a differença entre sete vezes o primeiro e seis vezes o segundo seja 9.

Resp. 4

19. Uma casa e o terreno importante em \$ 500\$000, o

terreno e o dobro da casa, e a casa e o dobro do terreno.

20. Dividir 1:2808 por A e B de sorte que a parte de A multiplicada por 7, seja igual a parte de B multiplicada por 9.

Resp. 7

21. A differença de dois numeros é 20, e o quociente do maior pelo menor é 3.

Equações com duas incognitas contendo mais de duas incognitas

199. Um systema de mais de duas equações pôde ser resolvido por qualquer dos tres methodos de eliminação que explicamos nos capitulos precedentes.

Quando há mais de duas incognitas, é preferivel o methodo de redução ao mesmo coefficiente, e é esse o que agora vamos explicar.

Problema. Achar os valores de x , y e z nas equações seguintes

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + y + z = 31 \\ 3x + y + z = 1 \end{cases}$$

Solução. Multiplicando por 2 a 1.ª eq., para tornar o coeff. de x da 2.ª igual ao coefficiente de x na 1.ª equação.

em seguida

resta a 1.ª eq. da 2.ª

Assim, a 2.ª eq. agora por 2 a 1.ª equação para tornar o coeff. de x da 2.ª igual ao coefficiente de x na 1.ª equação.

em seguida

resta a 1.ª eq. da 2.ª

Teremos agora as duas equações seguintes

em seguida

resta a 1.ª eq. da 2.ª

Substituindo na 2.ª equação resultante, achamos que $y = 10$. Substituindo na 1.ª resultante o termo do xy por 10, achamos que

substituindo na 1.ª equação os valores $2y$ e z pelos valores $10 + 4 = 14$, achamos que $x = 4$.

Regra. Elimina-se uma incognita, combinando uma equação com outra eliminando-se ali a mesma incognita por outra combinação, e as equações resultantes das duas combinações resolvem-se conforme a regra para duas incognitas.

Achada uma incognita, as outras se obtêm por deducção.

Exemplo. Resolver o systema de equações seguintes

$$\begin{cases} 3y + 2z = 38 \\ 3y + 4z = 30 \\ 5x + 3y + 4z = 41 \end{cases} \quad \begin{cases} 3y + 4z = 38 \\ 3y + 4z = 30 \\ 5x + 3y + 4z = 41 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 5y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 3y + 4z = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 5y + 3z = 4 \\ 3x + 2y + z = 0 \\ 5x + 3y + 4z = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 5x + 3y + 4z = 18 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 20 \\ x + 2y + 3z = 6 \\ 5x + 3y + 4z = 18 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x + 2y + 4z = 16 \\ 3x + 2y + z = 23 \\ 10x + 5y + 4z = 75 \end{cases} \quad \begin{cases} 5x + 2y + 4z = 16 \\ 3x + 2y + z = 23 \\ 10x + 5y + 4z = 75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7. \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 62 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 47 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 38 \end{cases} \quad \begin{cases} 8. \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 22 \\ \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{5} = 31 \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{5} + \frac{z}{6} = 32 \end{cases}$$

1. Um homem tem tres filhas; a somma das idades do primeiro e do segundo é 27 annos; a somma das idades do primeiro e terceiro é 20, e a do segundo e terceiro é 32. Qual é a idade de cada filha?

Resp. 12 annos, 15 e 17.

2. A somma de tres numeros é 59, $\frac{1}{2}$ da differença entre o primeiro e segundo é 5, e $\frac{1}{3}$ da differença entre o primeiro e o terceiro é 0; requer-se achar os tres numeros.

Resp. 20, 19 e 11.

3. Achar tres numeros tales que o primeiro com $\frac{1}{2}$ dos outros dois, o segundo com $\frac{1}{3}$ dos outros dois, e o terceiro com $\frac{1}{4}$ dos outros dois seja cada somma igual a 25.

Resp. 13, 17 e 10.

4. Um menino comprou em uma vez 4 bananas e 6 laranjas por 250 réis; em outra, 6 bananas e 4 pecegos por 360 réis, e em outra, 9 laranjas e 8 pecegos por 840 réis. Qual é o preço de cada fructa?

Resp. Bananas 20 réis, laranjas 40 réis e pecegos 60 réis.

Tres pessoas, A, B e C tinham 2.000\$000; se A desse a B, uma certa quantia, e se B desse 100\$ a A, então B teria só $\frac{1}{2}$ do dinheiro de C; requer-se a quantia que cada um possuía.

Resp. A 500\$, B 700\$ e C 800\$

6. Tres batalhões tem 1005 soldados; $\frac{1}{2}$ do primeiro batalhão com $\frac{1}{3}$ do segundo tem 60 soldados menos do que tem o terceiro batalhão, e $\frac{1}{2}$ do terceiro com $\frac{1}{3}$ do primeiro tem 105 soldados menos do que o segundo batalhão. Qual é o numero de cada um?

Resp. 1.º batalhão 630, 2.º 675 e 3.º 600

Problemas indeterminados

197. Um problema pôde ser determinado ou indeterminado, dependendo do numero das equações ou das incógnitas.

Um problema é indeterminado quando offerece menos equações do que incógnitas, e portanto não admite um numero limitado de soluções ou respostas.

198. Se um problema offerece mais equações do que incógnitas, empregam-se somente as equações necessárias para a solução, e desprezam-se as demais. Neste modo, o problema ficará determinado, como vemos no exemplo seguinte.

Problema. Achar dois numeros cuja somma seja 8, a differença 2, e o producto 15.

Solução. Sejam x e y os dois numeros. Temos as equações: $x + y = 8$, $x - y = 2$, e $xy = 15$. Das primeiras duas equações, tiramos $x = 3$ e $y = 5$, e substituímos em $xy = 15$, obtemos $3 \cdot 5 = 15$, o que é verdadeiro.

Para os alumnos não acharem difficuldade alguma no ensino dos problemas indeterminados, vamos primeiro distinguir as equações independentes das equações derivadas.

199. Na solução de um problema de duas equações simultaneas, quando queremos eliminar uma das incógnitas, podemos com equações independentes ou derivadas.

Equações independentes são as que tem a sua origem enunciado de um problema, e exprimem alguma condição estabelecida, assim as equações

1.º

2.º

o problema (n.º 192) da pag. 93, são independentes.

Equações derivadas são as que se formam das equações existentes por meio de uma addição, subtração, multiplicação ou divisão. Assim as

1.º

2.º

primeira é independente, e a segunda é derivada, porque é resultado da primeira multiplicada por 3.

A segunda equação portanto não envolve condição alguma que não esteja formulada na primeira, nem com ella podemos eliminar qualquer incógnita da primeira equação; pois multiplicarmos por 2 todos os termos da primeira, e depois tirarmos uma de outra para a eliminação, o resultado é nullo como poderemos verificar.

1.º multiplicada por 2,
(2.º)

200. Para podermos portanto eliminar uma incógnita de equações simultaneas, é necessario que essas equações sejam independentes ou derivadas de duas equações independentes.

201. Se derem um problema que esteja com uma só equação com duas incógnitas, como, exemplo, $x + y = 8$, este problema terá infinitamente uma solução indeterminada, pois tira-se

de $x + y = 8$, $y = 8 - x$. Ora, se $x = 1$, y será igual a 7, fazendo $y = 2$, x será igual a 6, e assim por diante como os na série que está ao lado. Podemos tambem organizar uma outra série de numeros, e neste caso, fazendo $y = 1$, x será igual a 7, fazendo $y = 2$, x será igual a 6, e assim por diante: de modo que poderiamos formar infinitamente de soluções ou respostas deste problema.

202. Se nos darem duas equações contendo tres incógnitas como

podemos eliminar a incógnita x subtraindo a segunda equação da primeira, mas o resultado será também indeterminado, porque apresenta uma só equação com duas incógnitas: $y+2z=13$.

Transpondo os termos da equação, temos $y=13-2z$. Ora, se fizermos $z=1$, $2z=2$, e y será igual a 11, se fizermos $z=2$, $2z=4$ e y será igual a 9, e assim por diante, como vemos na serie que está ao lado.

Se nas duas equações acima substituirmos as incógnitas y e z pelos diversos valores que ellas tem na serie, acharemos que x poderá ter os valores 3, 4, 5, 6, 7, ou 8, conforme os valores da serie, que substituicem y e z ; e deste modo a solução fica igualmente indeterminada. Portanto,

203. Quando o numero de incógnitas excede ao numero das equações independentes, o problema é indeterminado.

204. Podemos obter uma solução ou resposta para um problema indeterminado, pelo seguinte processo

Problema. Comprei 20 aves por 20\$000, sendo galinhas a 1\$000, perus a 4\$000, e frangos a \$200; quantas aves comprei de cada preço?

Solução. Seja x o numero das galinhas, y o numero dos perus, e z o numero dos frangos. Então

a 1ª equação é $x + y + z = 20$

e 2ª equação é $x + 4y + 2z = 200$

Nota-se logo á primeira vista que este problema é indeterminado, porque apresenta tres incógnitas, mas offerece somente duas equações. Simplificando a primeira equação dividindo-a por

20, temos

subtraindo della a segunda equação

temos a equação resultante

por numero inteiro e positivo temos

o $y = 6 + 19z$ e ora sendo $z=1$

porque os tres valores devem sommar

20, temos

$z=1$

$z=1$

com quantidades Escalobarias, não se prestam para este caso que requer somente numeros inteiros. Uma dessas soluções é 1 perdo 15 4 galinhas e 32 frangos. Nesta solução temos tambem 1+15+32= 48 unidades, na importancia de \$5000+15\$400+\$700= 20\$000

DEMONSTRAÇÕES ALGEBRICAS

205. Todas as demonstrações que temos apresentad. até aqui são simples demonstrações arithmeticas, baseadas em raciocínios sobre quantidades particulares e que estão ao alcance até das intelligencias infantis.

As demonstrações propriamente algebricas não podem ser apresentadas aos alumnos senão depois que elles sabem operar com facilidade e precisão os diversos processos do primeiro grau, antes disso, é muito difficil, se não impossivel, que elles comprehendam com clareza uma demonstração exposta, por meio de um processo, que se transpõe na completamente em cada operação que se effectua, e que só pôde ser comprehendido por aquelles que conhecem o encadeamento inteiro desse trabalho.

Como os alumnos já aprenderam a operar os processos necessários para resolver qualquer equação do primeiro grau, estão agora no caso de comprehender facili e bem como se demonstram algebricamente os enunciados, regras e theoremas da Algebra e da Arithmetica, e de avaliar como são exactos e engenhosos os raciocínios desta demonstração.

Vamos dar agora a demonstração algebrica de alguns theoremas e enunciados algebricos, começando pelos mais simples e facéis de comprehender, para que o alumno não ache difficuldade alguma no encadeamento destes raciocínios.

206. Theorema. Se multiplicarmos ou dividirmos ambos os termos de uma fracção por um mesmo numero, mudaremos a forma mas não alteraremos o valor da fracção

Demonstração algebrica

$$\frac{a}{b} = q \quad (1)$$

Se q o seu valor, temos portanto $b = \frac{a}{q}$ (1ª equação)

$$a = bq \quad (2)$$

$$am = bqm \quad (3)$$

multiplicando a 1ª equação por m

temos

multiplicando pelo m o valor de q , segue-se

temos

Dividindo agora os dois

dividido por b os termos a 1ª

temos

$$\frac{a}{b} = q \quad (5)$$

Se q o seu valor, temos portanto $b = \frac{a}{q}$ (1ª equação)

temos

multiplicando a 1ª equação por m

temos

Dividindo agora os dois

dividido por b os termos a 1ª

temos

«
«
«

207. Theorem on the ... la

«
«
«

De ...

1

18. Theorem on the ...

De ...

$$x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2)$$

«

«
«
«

209. Theorem on the ...

De ...

«

«
«

«

«

«

«

As que o operador sobre frações

210. Somme ...

De ...

«

«

19

211

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (1)$$

20

«

«

«

«

« 157,4

211. Subtrahir. Demonstrar que

Demonstração. As frações $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ reduzidas ao mesmo denominador, dão $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{bc}{bd}$.

Seja $\frac{ad}{bd} = m$, e $\frac{bc}{bd} = n$. Então temos $ad = bdm$ e $bc = bdn$. Devido todos os termos de cada igualdade por todos a 2.^a igualdade. Cancelando os factores em cada uma das segundas igualdades a 3.^a igualdade, que mostra que o dividendo a entre m e n que são os valores das

classe que para se reduzir uma fração de outra reduzem-se ambas a um denominador comum e successivamente sobre o divisor dos numeradores (n.º 163).

212. Multiplicar. Demonstrar que

Demonstração.

Seja $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}$. Sendo os termos desta igualdade $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ reduzidos ao mesmo denominador, dando origem as frações $\frac{ad}{bd}$ e $\frac{bc}{bd}$, a qual é igual a $\frac{ad \times bc}{bd \times bd}$. Daqui concluímos que para se achar o producto de duas frações, multiplicam-se entre si os numeradores e o mesmo se faz com os denominadores, e a fração resultante será o producto (n.º 169).

213. Dividir. Demonstrar que

Demonstração. Seja $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$.

Então temos $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}$, ou dividido um pelo outro $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$.

Multiplicando agora ambos os membros desta igualdade por $\frac{bc}{bc}$ temos a 2.^a igualdade. De cancelando no divisor b e d que são os denominadores, temos a 3.^a igualdade, que mostra que a divisão de a por c que são os valores das duas frações, é igual a $\frac{ad}{bc}$. Ora este quociente é o producto do dividendo $\frac{a}{b}$ pelo divisor $\frac{c}{d}$ ou os termos invertidos $\frac{a}{c} \times \frac{d}{b}$. Daqui concluímos que para se di-

$$= m \cdot \frac{ad}{bd} = bdm$$

$$bc = bdn$$

$$ad = bdm, \text{ e } bc = bdn$$

$$ad - bc = bdm - bdn$$

$$ad - bc = bdm - bdn$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

$$\frac{ad}{bd} = \frac{bdm}{bd} = \frac{bdn}{bd}$$

esse uma fração de por outra invertim-se os termos do divisor e multiplicamos as duas frações (n.º 163).

214. Uma equação do primeiro grau com uma só quantidade desconhecida terá uma só raiz isto é, um só valor ou resposta que pôde verificar a equação

$$\begin{aligned} & 4x + 2 = 10 \\ & 4x = 10 - 2 \\ & 4x = 8 \\ & x = \frac{8}{4} \\ & x = 2 \end{aligned}$$

por se não pôde ter mais um quociente de primeira grau com uma só incógnita não

Nota. Os exemplos que acabamos de expor habilitarão os alunos a compreender sem dificuldade as outras demonstrações algebricas que apresentaremos no desenvolvimento desta obra.

GENERALIZAÇÃO

215. Quando as quantidades conhecidas de um problema algebrico são representadas por letras, estas quantidades chamam-se valores geraes, porque o resultado da solução apresenta um modo geral de resolver todos os problemas da mesma especie. Generalizar um problema é pois substituir os seus valores particulares ou dados por valores geraes representados por letras, para que o valor da incógnita seja expresso em uma fórmula algebrica.

216. Fórmula é o valor da incógnita de um problema generalizado, expresso em linguagem algebrica, e que serve de regra geral para resolver problemas semelhantes que apenas differem no valor particular de seus dados.

217. Regra é a traducção de uma fórmula algebrica feita em linguagem common. Assim a fórmula $\frac{ab}{a+b}$ traduzida ou expressa em linguagem common, quer dizer: (1) producto de a multiplicado por b dividido pela somma de a mais b .

Vamos agora resolver alguns problemas generalizados para elucidar este ponto.

Primeiro caso da generalização

218. Problema. A somma de dois numeros é 68, e a sua differença é 20, quaes são os numeros?

Solução. Seja x o número maior e $y = 34 - x$ o número menor. Temos então a equação $2x - y = 44$ e o número x é 29.

Se tivéssemos de resolver agora muitos problemas desta natureza, em cada um deles teríamos de esclarecer primeiro a equação e repetir o mesmo trabalho.

Veremos agora, porém, este problema, obtemos uma fórmula que resolverá facilmente todos os problemas da mesma natureza.

Generalizemos pois estes problemas.

A soma de dois números é s , e a sua diferença é d quâes são os números?

Solução. Seja x o número maior e y o número menor. Temos então a equação $2x = s + d$. Resolvendo a equação, vemos que o número maior é $\frac{s+d}{2}$ e o número menor é $\frac{s-d}{2}$.

$$\begin{aligned} x + y &= s \\ x - y &= d \\ \hline 2x &= s + d \\ x &= \frac{s+d}{2} \end{aligned}$$

A solução deste problema generalizado apresenta duas fórmulas, uma é $\frac{s+d}{2}$, a outra é

Estas duas fórmulas estabelecerem a seguinte regra da Arithmetica

Para acharmos dois números, quando conhecemos a sua soma e a sua diferença, juntaremos a metade da soma com a metade da diferença e teremos o número maior, e subtraindo da metade da soma a metade da diferença, teremos o número menor.

Appliquemos agora estas fórmulas na solução dos seguintes problemas:

1. A soma de dois números é 100, e a sua diferença é 6; quâes são os números?

Solução. Se substituirmos s na duas fórmulas as letras s e d pelas suas respectivas letras teremos

$$\begin{aligned} x &= \frac{100+6}{2} = 53 \text{ número } x \\ y &= \frac{100-6}{2} = 47 \end{aligned}$$

2. Dois números somam 44, e a sua diferença é 6. quâes são os números?

Resp. 25 e 19.

3. A soma das idades de um pai e seu filho é 85 annos, a diferença destas idades é 21 annos; quâes são as suas idades?

Resp. 53 e 32.

Dois batalhões tem 1550 soldados; a diferença de numero entre um e outro batalhão é 70, quâes são os seus soldados cada batalhão?

Resp. 810 e 740

Segundo caso de generalização

219. Problema. Qual é o numero que sendo dividido por 3 e por 5, a somma destes quocientes é 10?

Solução. Seja x o numero requerido. Resolvendo a equação vemos que o valor de x é 15.

$$\begin{aligned} \frac{x}{3} + \frac{x}{5} &= 10 \\ 5x + 3x &= 240 \\ x &= 30. \end{aligned}$$

Generalizemos agora este problema:

Qual é o numero que sendo dividido por a e por b , a somma dos dois quocientes é c ?

Solução. Seja x o numero requerido. a equação

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{x}{b} &= c \\ bx + ax &= abc \\ x(b + a) &= abc \\ x &= \frac{abc}{b+a} \end{aligned}$$

A solução deste problema dá a fórmula que resolve todos os problemas desta natureza.

Appliquemos esta fórmula na solução dos seguintes problemas

1. Achar um numero que dividido por 3 e por 7, a somma destes quocientes seja

Solução. Substituindo na fórmula acima as letras a , b e c pelas suas respectivas letras teremos

$$x = \frac{abc}{b+a}$$

2. Qual é o numero que dividido successivamente por 4 e por 5, a somma destes quocientes é 45.

Resp. 100

3. Achar um numero que dividido successivamente por 6 e por 8, a diferença destes quocientes seja 2?

Solução. Neste problema substituímos na fórmula a diferença entre quocientes

$$\frac{x}{a} - \frac{x}{b} = c$$

Terceiro caso de generalização

220. Problema. Uma lebre foge de um cão que a persegue a 60 metros de distância; o cão corre 40 metros por minuto, e a lebre corre 36; em quantos minutos o cão alcançará a lebre?

Solução. Seja x o número de minutos que o cão leva para alcançar a lebre.

Como a lebre corre 36 metros por minuto, em x minutos ela terá percorrido $36x$ metros. Como o cão corre 40 metros por minuto, em x minutos ele terá percorrido $40x$ metros. Como o cão está a 60 metros de distância da lebre, a equação que representa a situação é:

$$\begin{aligned} 40x - 36x &= 60 \\ 4x &= 60 \\ x &= 15. \end{aligned}$$

Generalizemos este problema, substituindo as quantidades particulares 60, 40 e 36, pelas quantidades gerais a , m e n .

Solução. Temos a equação $mx - nx = a$, resolvendo esta equação, temos a fórmula $x = \frac{a}{m-n}$ que resolve todos os problemas desta natureza e que, traduzida em linguagem comum, quer dizer: a distância dividida pela diferença das velocidades dá o tempo requerido.

$$\begin{aligned} mx &= nx + a \\ mx - nx &= a \\ x(m-n) &= a \\ x &= \frac{a}{m-n} \end{aligned}$$

Aplicamos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Do porto do Rio de Janeiro saíu um vapor navegando 2 milhas por hora; quando já tinha alcançado a distância de 72 milhas, saíu do mesmo porto outro vapor no mesmo rumo, navegando 10 milhas por hora; em quantas horas o último vapor alcançará o primeiro?

Solução. $\frac{72}{10-2} = \frac{72}{8} = 9$ horas.

2. Um gavião veio a uma pomba que estava a 80 metros de distância dele, veio para alcançá-la no mesmo instante e a pomba fugiu do gavião; ora, vendo o gavião em vã procura, a pomba corre 8 metros do que a pomba, em quantos minutos a alcançará?

Sol. do $\frac{80}{8-0} = \frac{80}{8} = 10$ minutos.

3. Entre dois vapores que seguem a mesma direção a 5 milhas por hora, o primeiro está a 100 milhas do segundo; em quantas horas o primeiro alcançará o segundo?

que vai na frente anda 6 quilômetros por hora, e o outro 10, em quantas horas este alcançará aquele?

Solução. $\frac{100}{10-6} = \frac{100}{4} = 25$ horas.

Quarto caso de generalização

221. Problema. Um homem pôde fazer um trabalho em 8 dias, outro o pôde fazer em 12 dias; trabalhando juntos, em quantos dias o poderão fazer?

Solução. Seja x o número de dias requeridos para que os dois homens juntos possam fazer o trabalho. Como o primeiro homem faz o trabalho em 8 dias, ele fará $\frac{1}{8}$ do trabalho em x dias. Como o segundo homem faz o trabalho em 12 dias, ele fará $\frac{1}{12}$ do trabalho em x dias. Como os dois homens juntos fazem o trabalho em x dias, a equação que representa a situação é:

$$\begin{aligned} \frac{1}{8}x + \frac{1}{12}x &= 1 \\ 3x + 2x &= 24 \\ 5x &= 24 \\ x &= 4\frac{4}{5} \end{aligned}$$

Generalizemos agora este problema, substituindo os valores particulares 8 e 12 por valores gerais a e b , temos a equação no lado esquerdo, resolvendo, nos dá a fórmula $x = \frac{ab}{a+b}$ que resolve todos os problemas desta natureza.

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{x}{b} &= 1 \\ bx + ax &= ab \\ x(a+b) &= ab \\ x &= \frac{ab}{a+b} \end{aligned}$$

Aplicamos esta fórmula na solução dos seguintes problemas:

1. Um tanque tem duas torneiras, uma o enche em 6 horas, e a outra em 9 horas, abrindo-se as duas torneiras, em quantas horas o tanque ficará cheio?

Solução. $\frac{6 \times 9}{6+9} = \frac{54}{15} = 3\frac{3}{5}$ horas.

2. Uma vaca pode comer um sacco de feno em 7 dias, e um boi pode comer o mesmo sacco em 14 dias; em quantos dias o poderão comer ambos?

Solução. $\frac{7 \times 14}{7+14} = \frac{98}{21} = 4\frac{2}{3}$ dias.

Resp. $4\frac{2}{3}$

3. A pode fazer uma obra em 10 dias, B pôde fazê-la em 20 dias, em quantos dias o poderão fazer os dois trabalhando juntos?

Resp. $6\frac{2}{3}$ dias.

Nota. Poderia-se agora generalizar este problema, substituindo os valores particulares 10 e 20 por valores gerais a e b , mas como a fórmula já foi dada, não há necessidade de generalizar mais.

Solução infinita

$$228. \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

para depois, com facilidade, a solução da equação se lhe dá no sentido algebrico.

229. Quando os dois termos de uma fração qualquer são quantidades finitas e determinadas, a fração deverá ter também um valor finito e determinando. Assim o valor da fração $\frac{a}{b}$ é o quociente de a dividido por b . Mas se um ou ambos os termos dessa fração forem substituídos por zeros, os quocientes ou resultados serão

$$\frac{0}{b} = \frac{0}{b} \quad \text{ou} \quad \frac{a}{0} = \frac{a}{0}$$

Examinemos separadamente cada uma destas expressões algebricas, para vermos o valor ou significação que devem ter.

230. Uma fração algebrica é uma divisão, e em uma divisão, é evidente que, quanto menor for o divisor, tanto maior será o quociente.

Se na fração $\frac{a}{b}$, o dividendo for constante, e o divisor for diminuído de valor, o quociente irá crescendo sempre à medida que o divisor for diminuindo. Se o divisor for reduzido a um decimo, a um centesimo ou a um millesimo do seu valor, o quociente se tornará dez, cem ou mil vezes maior.

Se o divisor b for reduzido a um millesimo, o quociente se tornará um milhão de vezes maior, porque

$1000000 \times a$ ou um milhão de vezes o valor de a .

De modo que, se o divisor se tornar a menor quantidade assignada, isto é, o menor de todos os numeros, o quociente se tornará a maior quantidade assignavel, isto é, o maior de todos os numeros. E se o divisor descer a zero, limite sem valor algum, o quociente locará no extremo opposto que é o infinito, e se tornará uma quantidade infinita.

231. Para se exprimir em Algebra este quociente, empregase o symbolo ∞ que se chama infinito.

De sorte que $\frac{a}{0} = \infty$ lê-se: A quantidade a dividida por zero é igual ao infinito.

Em Algebra, pois, uma quantidade infinita quer dizer uma grandeza maior do que qualquer outra grandeza assignavel da mesma especie.

232. Na solução de uma equação, quando o valor da incognita apparece com a fórmula de $\frac{a}{0} = \infty$ devemos então, ler por esta expressão algebrica que não ha valor algum finito que satisfaça as condições do problema, isto é, não ha numero algum que multiplicado por zero, de um producto té a quantidade a , por este motivo, esta solução se denomina impossível porque é exactamente esta ideia que elle exprime.

Nota. Se $\frac{a}{0} = \infty$ e $\frac{0}{b} = 0$, este caso ocorre quando $b = 0$ e $a = 0$.

Solução zero

233. Se na fração $\frac{a}{b}$, o denominador b for constante, e o numerador a for diminuído de valor, o quociente ou valor da fração irá também diminuindo. Assim as frações $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ etc. tem um denominador igual, mas porque o numerador vai diminuindo de valor, cada uma destas frações é menor que a precedente.

Portanto, se o numerador a diminuir de valor, e se tornar o menor dos numeros, o valor da fração diminuirá da mesmo modo e finalmente se o numerador descer a zero, a fração $\frac{0}{b}$ ficará reduzida também a zero e se exprimirá: $\frac{0}{b} = 0$, que se lê: Zero dividido pela quantidade b é igual a zero.

234. Quando, pois, o resultado da solução de um problema apparece com a fórmula $\frac{0}{b}$, chama-se solução zero, e quer dizer que não ha necessidade da quantidade alguma para satisfazer as condições do problema, e por isso a resposta é zero.

Solução indeterminada

235. Se na fração $\frac{a}{b}$ ambos os termos forem substituídos por zeros, o resultado será $\frac{0}{0}$. Ora, zero dividido por zero, não tem em Arithmetica significação alguma mas em Algebra, tem uma significação importante que deve ser perfeitamente conhecida.

236. Quando o valor da incognita em uma equação do primeiro grau apparece com a forma $\frac{0}{0}$, qualquer quantidade

1) Não satisfazer as condições do problema. Com effeito, numa divisão, o dividendo é igual ao divisor multiplicado pelo quociente; ora, devle que qualquer numero, multiplicado pelo divisor zero, dá um producto igual ao dividendo zero ($0 = 0 \times X$), segue-se que o symbolo $\frac{0}{0}$ exprime uma quantidade qualquer. Por isso, o resultado $\frac{0}{0}$ chama-se **Solução Indeterminada**, porque exprime uma quantidade indeterminada, isto é, um numero qualquer.

237. Algumas vezes o valor da incógnita apresenta-se em a forma indeterminada $\frac{0}{0}$, sem contudo o ser, como vemos no exemplo seguinte:

$$\frac{a^2 - 16}{a - 4} = \frac{16 - 16}{1 - 4} = \frac{0}{-3}$$

Se termos á quant. a o valor de 4, a^2 será 16, e então teremos

Mas se simplificarmos a fracção, supprimindo o factor $(a-4)$ que é commum ao numerador e ao denominador, teremos o seguinte resultado:

Or $\frac{a^2 - 16}{a - 4} = \frac{(a-4)(a+4)}{a-4} = a+4$, e não $\frac{0}{-3}$ como achamos, facilmente este engano, se, antes de simplificar, a expressão for colocada em uma expressão mais simples, isto é, a do numerador e a do denominador.

238. Na solução de alguns problemas, obtém-se uma outra forma que também exprime uma quantidade indeterminada. Essa forma é $0=0$, que se lê: *Zero igual a zero*.

Vamos resolver um problema que nos dará a forma $0=0$.

Problema. Ha um numero do qual $\frac{1}{2}$ mais $\frac{1}{3}$ dão uma somma igual a $\frac{1}{6}$ do mesmo numero; qual é esse numero?

Solução. Seja x o numero. Então temos: $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} = \frac{x}{6}$

$$\begin{array}{l} \text{Multiplicando} \quad 3x + x = 2x \\ \text{restando} \quad 3x + x - 2x = 0, \\ \text{resulta} \quad 0 = 0 \end{array}$$

O resultado $0=0$ mostra que qualquer numero satisfaz as condições do problema. E isto é evidente, pois $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ são iguaes a $\frac{1}{6}$ ora em qualquer numero $\frac{1}{2}$ igual a outro $\frac{1}{3}$ isto é, uma metade igual a outra metade.

239. Quando a forma $\frac{0}{0}$ ou $0=0$ apparece como o resultado da solução algebraica de um problema, quer dizer que a solução é indeterminada.

Solução absurda

240. Uma equação é uma traducção fiel do enunciado do problema; o que o problema diz em linguagem algebraica. Uma equação exprime com clareza em linguagem algebraica, por isso quando os dados de um problema são exactos e as condições razoaveis, a solução dá não só o valor da incógnita, mas attesta também a verdade exposta no enunciado. Mas assim como uma equação traduz fielmente qualquer verdade ou exactidão de um problema, traduz egualmente qualquer absurdo ou disparate que elle contenha.

241. Quando pois ha algum absurdo nos dados ou nas condições de um problema, esse dislate apparece com toda a clareza no resultado final da equação, que dá o valor da incógnita.

Exemplifiquemos este ponto com o seguinte problema: Qual é o numero cujos $\frac{1}{2}$ menos 5 inteiros são iguaes á differença que ha entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ do mesmo numero e mais 7?

$$\begin{array}{l} \text{Solução. Seja } x \text{ o numero. Então temos} \quad \frac{x}{2} - 5 = \frac{x}{4} - \frac{x}{6} + 7, \\ \text{multiplicando} \quad 7x - 60 = 3x - 2x + 84 \\ \text{restando} \quad 7x + 2x - 3x = 84 + 60, \\ \quad \quad \quad 6x = 144 \end{array}$$

O erro ou dislate apparece claramente no resultado da equação $6x = 144$; ora é um absurdo affirmar que zero é igual a 144 unidades, e por isso este resultado tem o nome de **solução absurda**.

Não havendo engano algum no processo da solução, o resultado não pôde partir senão do enunciado do problema. Com effeito, se examinarmos as condições propostas vemos logo a sua disparidade, porque a differença entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{6}$ é $\frac{1}{12}$; ora $\frac{x}{2} - 5$ não pôde ser igual a $\frac{x}{12} + 7$, como affirmamos no problema.

Quando pois, pela simples leitura de um problema, não podemos perceber o absurdo que elle enuncia, o resultado da solução o mostrará com clareza.

242. Se dermos à letra n um valor qualquer, teremos a seguinte tabela, resumida das expressões algebraicas das diversas soluções:

Sol. positiva, $x = n$	
Solução negativa, $x = -n$	Solução indeterminada, x
Solução infinita, $x = \frac{n}{0}$	Solução absurda, $0 = n$.

DISCUSSÃO DOS PROBLEMAS

243. Quando um problema se apresenta generalizado, isto é, quando suas quantidades conhecidas estão representadas por letras, o 215 pode, ao se fazer valores variáveis a diversas resultados da solução desse problema se atribuírem os valores particulares ou limitários.

244. O segredo de um problema é atribuir valores particulares às suas quantidades generalizadas, e depois interpretar os seus resultados.

A discussão do seguinte problema nos dará o esboço de um método para comprimentarmos a discussão de este ponto.

Problema. Dois correios partiram ao mesmo tempo de dois lugares A e B que distam 8 milhas um do outro; seguindo ambos a mesma direcção, um andava m milhas por hora e o outro n milhas em quantas horas um alcançará o outro?

Solução. Seja x o tempo decorrido desde a partida dos correios.

Seja m a velocidade do correio que vai para a direita, e n a velocidade do correio que vai para a esquerda. Como os dois correios andam na mesma direcção, o correio que anda mais depressa alcançará o outro.

O correio que anda mais depressa alcançará o outro, isto é, quando a distância entre os dois correios for zero. A equação deve ser

Equação

$$mx = nx + 8$$

$$mx - nx = 8$$

$$x = \frac{8}{m-n}$$

246. Discussão do problema. A resposta, que é o número de horas necessárias ao encontro, apparece com a fórmula $\frac{8}{m-n}$. Isto é, a distancia que separa inicialmente os dois trens, dividida pela differença entre as velocidades $m-n$.

1. a solução $\frac{8}{m-n}$ pôde ter cinco resultados em fórmulas diversas, segundo os valores que attribuímos às letras m , n e n .

1.ª Forma. Supponhamos que as tres quantidades a , m e n sejam positivas e que m seja maior do que n . Neste caso o numero de horas requerido no problema será uma quantidade positiva, porque sendo $m > n$, a differença entre estas duas quantidades será positiva; e a quantidade a dividida por um divisor positivo, dará um quociente positivo.

Ora, isto é evidente das circumstancias do problema, porque se o correio que vai atraz, é mais veloz do que o que vai adiante, é claro que a distancia que os separa, irá diminuindo, e no fim de certo numero de horas, essa distancia desaparecerá, e elles ficarão juntos. Poderemos fazer esta verificação com valores particulares. Se dermos às letras a , m e n os valores 20, 8 e 4, teremos o seguinte resultado:

$$x = \frac{a}{m-n} = \frac{20}{8-4} = 5 \text{ horas.}$$

Isto quer dizer que, se a distancia que separa os correios for 20 milhas e um andar 8 milhas por hora, e o outro 4 milhas por hora no fim de 5 horas. Nesta supposição a solução é positiva.

2.ª Forma. Supponhamos agora que n seja menor do que m . Neste caso o valor de x será negativo, por que, sendo n maior do que m , a differença de $m-n$ será negativo e a quantidade positiva a dividida por $m-n$ dará um quociente negativo.

Poderemos verificar facilmente este resultado por meio de algarismos. Como n é maior do que m , daremos a m o valor de 4, e a n o valor de 8. Então,

$$x = \frac{a}{m-n} = \frac{20}{4-8} = -5, \text{ isto é, } x = -5.$$

1. a quando o valor da incognita apparece negativo, mostra que há no problema algum defeito que deve ser corrigido. Nesta supposição dos valores, o defeito é evidente, porque se o correio que vai adiante, é mais veloz do que o que vai atraz, é claro que este nunca poderá alcançar aquelle; e quanto mais caminharão, maior distancia os separará. Neste caso a solução é negativa, e mostra que o problema deve ser modificado para ter uma solução positiva.

Pela simples leitura da prob. enca comprehendemos que os dois correios seguem a direcção

$$m \dots n \dots$$

mas o problema não diz se a qual d'elles se adiante ou atraz não nos quebra a pensar assim, e por isso podemos modelar o sentido da direcção fazendo-os seguir em contrasenso.

n

e deste modo a solução se tornará positiva, porque sendo $n > m$, a differença $(n - m)$ será positiva, e a quant. hda a distancia por um divisor positivo dará um quoziente positivo.

3.ª Forma. Supponhamos que m seja igual a n , isto é que os dois correios andam com igual velocidade, neste caso, o numero de horas, que é o valor da incognita, será infinito porque sendo $m = n$, então $\frac{n}{m-n} = \frac{n}{0} = \infty$, isto é, será igual ao infinito como já demonstramos nas secções 230 e 231.

Nesta supposição dos valores do problema, a solução é infinita, e não pôde ser outra, porque se os dois correios estão separados por uma certa distancia e andam na mesma direcção, e com igual velocidade, é certo que nunca poderão ficar juntos, pois, por mais que caminhem, a mesma distancia os separará.

A linguagem mathematica, diz-se que os dois correios ficaram juntos a uma distancia infinita do ponto da partida. Mas esta expressão quer simplesmente dizer em linguagem commum, que elles nunca se encontrarão, ou que é impossivel encontrarem-se. São desta natureza todos os casos que, em Algebra, apresentam uma solução infinita.

4.ª Forma. Supponhamos ainda que n seja zero, isto quer dizer que não haja distancia alguma entre os dois correios. Neste caso, o numero de horas requerido será tambem zero porque a solução $x = \frac{n}{m-n}$ será igual a $\frac{0}{m-n}$. E nós já demonstramos que zero dividido por uma quantidade qualquer, é igual a zero (n.º 232).

Ora este resultado é evidente na solução, porque se não ha distancia alguma entre os dois correios, é porque elles estão juntos, e se estão juntos, não ha necessidade de ter, por algum para um alcançar o outro. Nesta supposição dos valores, a solução é zero.

5.ª Forma. Supponhamos finalmente que n seja zero e m igual a n neste caso, o numero de horas requerido será indeterminado, porque a solução $\frac{n}{m-n}$ será igual a $\frac{0}{0}$, symbolo que significa uma quantidade indeterminada, como já demonstramos em. 236.

Este resultado é evidente das condições que supponhamos no problema, porque se os dois correios estão juntos e caminham com igual velocidade, é certo que, desde a partida, elles estarão juntos na primeira hora de caminho, na segunda, na terceira e em todo o tempo que caminharem nestas condições, por isso qualquer numero de horas satisfará as condições do problema. Esta solução é indeterminada.

Vemos pois, que, attribuindo-se ás quantidades generalizadas a , m e n nestes problemas valores particulares ou imaginarios, as fórmulas da solução toam um resultado completamente diverso.

246. Para fazermos apparecer a solução indeterminada com a fórmula 0 = 0, vamos resolver o seguinte problema.

Tres pessoas A, B e C tem as seguintes idades, a idade de B é 6 annos menor do que a de A, e 4 annos maior do que a de C, e $\frac{1}{2}$ da idade de A mais $\frac{1}{3}$ da idade de C são iguaes a $\frac{1}{2}$ da idade de B e mais 1. Quaes são as idades destas pessoas?

Solução. Seja x a idade de A, y a idade de B, e $z = 6 - 4$ a idade de C.

$$\begin{aligned} x - y &= 6 \\ y - z &= 4 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}z &= \frac{1}{2}y + 1 \end{aligned}$$

O resultado 0 = 0 mostra que a solução é indeterminada, e por isso qualquer numero satisfará as condições do problema. A expressão $\frac{1}{2}x$ quer dizer $\frac{1}{2}$ de x ou

Tomemos agora ao acaso o numero 50, por a idade de A, assim de varios se este satisfaz as condições do problema. A idade de A sendo 50, a de B é 44 e a de C é 46. As condições do problema são

$$\begin{aligned} 50 - 44 &= 6 \\ 44 - 46 &= -2 \\ \frac{1}{2} \cdot 50 + \frac{1}{3} \cdot 46 &= 25 + 15\frac{2}{3} = 40\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Esta identidade mostra que o numero 50 satisfaz as condições do problema. A idade de A sendo 50, a de B é 44 e a de C é 46. As condições do problema são

DESIGUALDADE

247 Desigualdade algébrica é uma expressão que apresenta duas quantidades unidas pelo signal $>$ ou $<$ sendo uma dellea maior do que a outra, como:

$$(1^{\circ} \text{ Exemplo}) \quad 3+5 > 7-2$$

A desigualdade significa o inverso da igualdade. O termo ou termos que vão antes do signal, formam o primeiro membro da desigualdade, e os que vão depois, formam o segundo membro.

Na discussão dos problemas, muitas vezes é necessário comparar quantidades desiguales para determinar os valores das quantidades desconhecidas, e estabelecer certas relações entre ellas.

248. Duas ou mais desigualdades estão no mesmo sentido, quando em todas ellas o primeiro membro é maior do que o segundo, ou quando em todas o segundo membro é maior do que o primeiro. Assim, as desigualdades $15 > 12$, $7 > 5$ e $4 > 1$ estão no mesmo sentido; e as desigualdades $5 < 8$, $9 < 11$ e $13 < 15$ estão também no mesmo sentido.

Doas desigualdades estão em sentido contrario, quando em uma dellea o primeiro membro é maior do que o segundo, e na outra, o segundo membro é maior do que o primeiro, como $15 > 12$ e $11 < 14$.

249. Para notarmos com mais clareza a differença entre os valores positivos e negativos expressos em uma desigualdade, observaremos a seguinte escala descendente que mostra a relação de valores dependentes do signal que effectua uma quantidade

Em menor do que zero	Em maior do que zero
+5, +4, +3, ... 0	2, -3, -4

Visto que esta escala é descendente, notamos nella os tres seguintes factos que servem de base para as operações da desigualdade:

- 1.^o Qualquer numero positivo é maior do que zero
- 2.^o Zero é maior do que qualquer numero negativo
- 3.^o Entre dois numeros negativos, o maior é o que tem o valor numerico absoluto menor.

Assim $+1 > 0$, isto é, 1 positivo é maior do que zero.
 $0 > -1$, isto é, zero é maior do que 1 negativo.
 $-1 > -5$, isto é, 1 negativo é maior do que 5 negativo.

250. Quasi todas as alterações que effectuamos nas equações do primeiro grau, podem ser também operadas nas desigualdades, como vamos reconhecer nos seguintes princípios:

Se juntarmos o mesmo numero ou a mesma quantidade a ambos os membros de uma desigualdade ou se de ambos os membros subtrahirmos o mesmo numero, a desigualdade não ficará alterada.

Illustração. Se a desigualdade $5 < 8$ a qual affirmamos, que 5 é menor do que 8, se juntarmos 1 a ambos os membros da desigualdade, teremos $5+1 < 8+1$ ou $6 < 9$ e se subtrahirmos 1 de ambos os membros, teremos $5-1 < 8-1$ ou $4 < 7$.

Se a ou a uma das duas partes da desigualdade $5 < 8$ se subtrahirmos a quantidade m teremos $m < 5$ ou $m < 8$ ou a desigualdade $m < 5$ ou $m < 8$ ficará alterada, sendo que ambas as igualdades teriam o mesmo resultado, a desigualdade $m < 5$ ou $m < 8$.

251. 2.^o Qualquer termo de um membro pode ser mudado para o outro membro, trocando-se-lhe o signal

Illustração. Se a desigualdade $5 < 8$ a qual affirmamos, que 5 é menor do que 8, se mudarmos o termo 5 para o outro membro, trocando-se-lhe o signal, teremos $5 > 8$ ou $5 > 8$ e se mudarmos o termo 8 para o outro membro, trocando-se-lhe o signal, teremos $8 > 5$ ou $8 > 5$.

252. Se os dois membros de uma desigualdade forem divididos ou divididos por um mesmo numero positivo, a desigualdade continuará no mesmo sentido.

Illustração. Se dividirmos ambos os membros da desigualdade $5 < 8$ por 2, teremos $5/2 < 8/2$ ou $2.5 < 4$ e se dividirmos ambos os membros da desigualdade $5 < 8$ por 10, teremos $5/10 < 8/10$ ou $0.5 < 0.8$.

Mas se os dois membros da desigualdade forem multiplicados ou divididos por um mesmo numero negativo, a desigualdade resultante ficará em sentido contrario.

Illustração. Se multiplicarmos ambos os membros da desigualdade $5 < 8$ por -2 teremos $5 \times -2 > 8 \times -2$ ou $-10 > -16$ pois, como já vimos, tre duas quantidades, a maior é a que tem o valor numerico absoluto maior (N. 249.)

Se observarmos a escala

253. 4.^o Se mudarmos os signaes de todos os termos de ambos os membros de uma desigualdade, ella ficará com o sentido contrario, porque esta mudança dá o mesmo resultado que multiplicar todos os seus termos por -1 .

Ilustração. Assim, na desigualdade $3+2 > 1$ mudando o sinal dos termos temos $3+2 < -1$ $3+1$ reduzindo os termos, temos $-3 > 4$

Na desigualdade, por exemplo, é maior o primeiro membro, mas sendo trocados os membros, fica no 2.º o primeiro membro, e por isso é maior o segundo membro, pois -1 é maior do que -3

254. 6.º Se duas desigualdades formadas no mesmo sentido forem somadas membro a membro correspondente, a desigualdade resultante não mudará de sentido

1.ª a proposição. A soma das desigualdades $1.º$ $3 < 4$ $1 < 7+4$ $1+1$ ou $2 < 12$ é verdadeira, porque os membros da segunda, somados, dão 12 , que os da primeira dá 2 , e $12 > 2$, e a soma $2 < 12$ é verdadeira.

Mas se nas duas desigualdades, em vez da adição, operarmos a subtração, o resultado pode ser no mesmo sentido, no sentido contrario ou resultar uma igualdade

Ilustração. Em tres exemplos seguintes de subtração mostram esta

Mesmo sentido	Sendo contrario
Exemplos	Exemplos
1.º $3 < 4$	1.º $3 < 4$
2.º $1 < 7+4$	2.º $1 < 7+4$
3.º $1+1 < 12$	3.º $1+1 < 12$
4.º $2 < 12$	4.º $2 < 12$

255. 6.º Se os dois membros de uma desigualdade, sendo positivos forem elevados à mesma potencia, ou se delles se extrahir a mesma raiz, a desigualdade resultante ficará no mesmo sentido.

Ilustração. As desigualdades $2 < 3$ e $3^2 < 2^3$ que é $9 < 8$ não no mesmo sentido. Do mesmo modo, $25 < 10$ e $25^2 < 10^2$ que é $625 < 100$ não no mesmo sentido.

É claro que se o primeiro membro for maior do que o segundo, o seu quadrado será maior do que o segundo e a raiz quadrada do primeiro será maior do que a raiz quadrada do segundo. Mas se os dois membros não forem positivos a regra não se applica.

256. Resolver uma desigualdade é determinar o limite superior ou inferior do valor que a incognita pode ter para

Em geral resolve-se uma desigualdade do mesmo modo que uma equação do primeiro grau, observando os principios que acabamos de expôr.

1.º Problema. Achar um numero cujo triplo menos 4, seja maior do que o mesmo numero e mais 3.

Solução. Seja x o numero requerido, e pelas condições do problema, temos a seguinte desigualdade $3x-4 > x+3$
 ou respondendo os termos iguaes $3x-x > 4+3$
 reduzindo os termos e dividindo $2x > 7$
 Sendo o numero maior do que 3, pôde ser qualquer numero ou muito superior a 3, visto não ter outro limite.

257. Se um problema de desigualdade offerecer duas condições em uma, a incognita apresentará o limite superior, e em outra, o limite inferior.

II Problema. Cinco vezes certo numero e mais 4 é maior do que duas vezes esse numero e mais 19 e cinco vezes esse numero menos 4 é menor que quatro vezes o numero e mais 4. Requer-se o numero

Solução. Seja x o numero requerido no problema
 A primeira condição é $5x+4 > 2x+19$
 A segunda condição é $5x-4 < 4x+4$

Tem-se da primeira $5x-2x > 19-4$ $3x > 15$ $x > 5$
 e da segunda $5x-4x < 4+4$ $x < 8$
 Sendo x maior do que 5, e menor do que 8, o numero que satisfaz as duas condições pôde ser 6, 7, ou qualquer outro numero entre 5 e 8.

III Problema. Demonstrar que a somma dos quadrados de duas quantidades desiguaes é maior do que duas vezes o producto dessas quantidades, isto é, que $a^2+b^2 > 2ab$

Demonstração. Seja a o quadrado de um numero, que ou seja positivo ou negativo, e b o quadrado de um numero, que ou seja positivo ou negativo. A soma dos quadrados de dois numeros positivos é maior do que zero (n.º 249) segue-se que $a^2+b^2 > 0$ e o quadrado de $a-b$ é maior do que zero.

Portanto $a^2+b^2 > 2ab$
 Quando $2ab$ a ambos os membros $a^2+b^2 > 2ab$
 reduzindo os termos $a^2+b^2-2ab > 0$
 Fica, portanto demonstrado que a^2+b^2 é maior do que $2ab$

Regra. Para resolvermos uma desigualdade faremos todas as transformações necessarias para achar o valor mais approximado da incognita, operando como nas equações do primeiro grau.

Resolver os seguintes problemas

1. Se $4x-7 < 2x+3$, e se $3x+1 = 13$, qual o valor de x ?
 Resp. $x = 3$

2. Achar o limite de x na desigualdade $7x-3 > 32$.
 Resp. $x > 5$

3. Achar o limite de x em $5+\frac{x}{2} < 8+\frac{x}{4}$
 Resp. $x < 36$

7. O dobro de certo numero e mais 7 é menor que 19; e o seu triplo menos 5 é menor que 13. Requer-se o nome.
Resp. ?

8. Determinar quanto a somma $a^2 + b^2$ excede ao producto $2ab$.
Resp. $(a - b)^2$.

FORMAÇÃO DAS POTENCIAS

258. Quando definimos os termos algebricos (ns. 24 e 29) demos uma exposição resumida dos symbolos que representam as diversas potencias e raizes, para os discipulos poderem lêr estas expressões, e effectuar com ellas as quatro operações algebricas sobre inteiros e fracções. Agora, porém, que temos de entrar na formação dessas potencias e extracção das suas raizes, precisamos desenvolver mais este ponto.

259. A palavra potencia é usada em Algebra para significar o producto de uma quantidade multiplicada por si mesma um certo numero de vezes.

Qualquer quantidade é geralmente considerada como a primeira potencia de si mesma; mas rigorosamente falando, ella não é potencia, mas sim raiz ou factor do qual se podem formar potencias, assim x , tomado uma só vez como factor, não dá producto nem potencia, porque $x^1 = x$.

260. A segunda potencia ou o quadrado de uma quantidade é o producto dessa quantidade por si mesma. Assim, a segunda potencia de x é x^2 porque $x \times x = x^2$.

261. A terceira potencia ou o cubo de uma quantidade é o producto dessa quantidade tomada tres vezes como factor. Assim, a terceira potencia de y é y^3 , porque $y \times y \times y = y^3$.

262. A quarta potencia de uma quantidade é o producto dessa quantidade tomada quatro vezes como factor. Assim, a quarta potencia de a é a^4 , porque $a \times a \times a \times a = a^4$. E do mesmo modo, seguem as demais potencias.

A formação das potencias ou Potenciação é a operação que tem por fim achar qualquer potencia de uma quantidade.

263. Chama-se expoente o numero escripto no alto da letra, isto é, quantas vezes elle tem de ser tomado como factor.
Assim,

A 1.^a potencia de 2 é 2
A 2.^a potencia de 2 é 4
A 3.^a potencia de 2 é 8
A 4.^a potencia de 2 é 16
A 5.^a potencia de 2 é 32
A 6.^a potencia de 2 é 64
A 7.^a potencia de 2 é 128
A 8.^a potencia de 2 é 256
A 9.^a potencia de 2 é 512
A 10.^a potencia de 2 é 1024

Elevação de um monomio a qualquer potencia

264. Problema. Qual é a terceira potencia de $2ab^2$?

Solução. Segundo a definição a terceira potencia de $2ab^2$ deve ser o producto dessa quantidade tomada tres vezes como factor. Então,

$$(2ab^2)^3 = 2^3 a^3 b^{2 \times 3} = 8a^3b^6$$

e fica 3. e as letras a e b elevadas tres vezes os seus exponentes ou se ficam a^3b^6 .

265. Os signaes das potencias ha dois casos a considerar, que são:

- 1.^o Quando uma quantidade é positiva.
- 2.^o Quando uma quantidade é negativa.

266. Primeiro caso. Quando uma quantidade é positiva, fór o numero de vezes que ella entre como factor, o producto será sempre positivo; pois $+$ multiplicado por $+$ dá $+$. Assim,

$$(+a)^2 = a^2, \text{ e tambem } (-a) \times (-a) = +a^2 = +a^2$$

267. Segundo caso. Quando uma quantidade é negativa, temos os seguintes resultados:

$$(-a)^2 = (+a) \times (+a) = +a^2, \text{ a } 3.^{\text{a}} \text{ potencia é negativa, } (-a)^3 = (-a) \times (-a) \times (-a) = -a^3, \text{ a } 4.^{\text{a}} \text{ potencia é positiva, } (-a)^4 = (+a) \times (+a) \times (+a) \times (+a) = +a^4, \text{ a } 5.^{\text{a}} \text{ potencia é negativa, } (-a)^5 = (-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a) \times (-a) = -a^5$$

Daqui concluímos que o producto de um numero par de factores negativos é positivo; e o producto de um numero impar de factores negativos é negativo. Por isso as potencias pares de uma quantidade negativa são todas positivas, e as potencias impares são negativas.

Regra. Para se elevar um monómio a qualquer potencia, eleva-se o coefficiente numeral ao grau requerido, e multiplíca-se o expoente de cada letra pelo expoente da potencia; se o monómio fór positivo, todas as potencias serão positivas; mas se fór negativo, todas as potencias pares serão positivas, e todas as potencias impares serão negativas.

	Respostas
1. Achar o quadrado de $3a^2y^2$.	$9a^4y^4$.
2. Achar o quadrado de $5b^2c^2$.	$25b^4c^4$.
3. Achar o cubo de $2x^2y^3$.	$8x^6y^9$.
4. Achar o quadrado de ab^2c .	$a^2b^4c^2$.
5. Achar o cubo de abc^2 .	$a^3b^3c^6$.
6. Achar a quarta potencia de $3ab^2c^3$.	$81a^4b^8c^{12}$.
7. Achar a quarta potencia de $3ab^2c^3$.	$81a^4b^8c^{12}$.
8. Achar a quinta potencia de ab^2c^3 .	$a^5b^{10}c^{15}$.
9. Achar a quinta potencia de $-ab^2c^3$.	$-a^5b^{10}c^{15}$.
10. Achar a settima potencia de $-m^2n^3$.	$-m^{14}n^{21}$.
11. Achar o cubo de $7a^2$.	$343a^6$.
12. Achar a quarta potencia de $7a^2x^3$.	$2401a^8x^{12}$.

Elevação de um polynomio a qualquer potencia

268. Problema. Qual é o quadrado de $ax+cy$?

Solução. Multiplícamos $ax+cy$ por si mesma, ou segundo o 1.^o theorema, obtemos a seguinte expressão ao lado.

$$(ax+cy)(ax+cy) = a^2x^2 + 2acxy + c^2y^2.$$

Regra. Para se elevar um polynomio a qualquer potencia, acha-se o producto dessa quantidade, tomada como factor tantas vezes quantas forem as unidades do expoente da potencia requerida.

1. Achar o quadrado de $1-x$.	$1-2x+x^2$.
2. Achar o quadrado de $x+1$.	x^2+2x+1 .
3. Achar o quadrado de $a+cy$.	$a^2+2acy+c^2y^2$.
4. Achar o quadrado de $2x^2-3y^2$.	$4x^4-12x^2y^2+9y^4$.
5. Achar o cubo de $a-x$.	$a^3-3a^2x+3ax^2-x^3$.
6. Achar o cubo de $x-y$.	$x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$.
7. Achar o cubo de $2x-1$.	$8x^3-12x^2+6x-1$.

8. Achar o valor de $(c-x)^2$ $c^2-2cx+x^2$.
9. Achar o quadrado de $a+b+c$ $a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$.
10. Achar a quarta potencia de $1-6$ 6^4 .

Elevar uma fracção a qualquer potencia

269. Problema. Qual é o quadrado de $\frac{a+b}{a-b}$?

Solução. Multiplícamos a fracção $\frac{a+b}{a-b}$ por si mesma, obtemos o seguinte resultado.

Regra. Elevam-se os dois termos da fracção á potencia requerida.

1. Achar o quadrado de $\frac{2x}{y}$.	Resp. $\frac{4x^2}{y^2}$.
2. Achar o quadrado de $\frac{a^2}{x^2y}$.	$\frac{a^4}{x^4y^2}$.
3. Achar o cubo de $-\frac{2x}{y^2}$.	$-\frac{8x^3}{y^6}$.
4. Achar o quadrado de $\frac{2x^2}{3y}$.	$\frac{4x^4}{9y^2}$.
Achar o quadrado de $\frac{x^2}{x^2+3}$.	$\frac{x^4}{x^4+6x^2+9}$.

Binómio de Newton

270. Todos os binómios podem ser elevados a qualquer potencia, não só a inteira, mas a fraccional, e a negativa. Este processo, além de ser muito moroso, está sujeito a muitos erros. O grande mathematico inglez Isaac Newton descobriu um processo facilissimo de elevar um binómio a qualquer potencia, e a esse processo deu-se o nome de **Binómio de Newton**.

Para comprehendermos a base em que assenta as leis desta fórmula importante, elevemos os binómios $(a+b)$ e $(a-b)$ até a quinta potencia, supprimindo as diversas multiplicações para não tomarem aqui muito espaço:

2. ^a Potencia.	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.
3. ^a Potencia.	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.
4. ^a Potencia.	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.
5. ^a Potencia.	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$.

271. Nas diversas potências destes dois binômios, termos de analysar quatro pontos, que são:

- 1.º O número de termos.
- 2.º Os signaes dos termos.
- 3.º Os expoentes dos termos.
- 4.º Os coefficients dos termos.

Analysemos cada um destes pontos separadamente.

Numero dos termos

272. Examinando o numero de termos de cada potencia dos dois binômios, vemos que a segunda potencia tem tres termos; a terceira, potencia tem quatro termos, a quarta potencia tem cinco, a quinta potencia tem seis, daqui inferimos que o numero dos termos de qualquer potencia de um binômio, é 1 mais que a exponente da potencia.

Signaes dos termos

273. Examinando se os signaes, ficam evidentes que quando ambos os termos do binômio são positivos, todos os termos das potências são positivos.

Quando o primeiro termo é positivo e o segundo negativo, todos os termos impares são positivos e os pares são negativos.

Nota. Termos impares são 1.º, 3.º, 5.º etc., e termos pares são o

Expoentes dos termos

274. Se omitirmos os coefficients da quinta potencia de $a-b$ e $a+b$, a parte literal será

$$a^5 - a^4b + a^3b^2 - a^2b^3 + ab^4 - b^5.$$

Examinando estas e outras potências de $a+b$ e $a-b$, vemos que os expoentes das letras são regidos pelas seguintes leis

1.º O expoente da letra no primeiro termo é o mesmo que o da potencia do binômio, e o expoente desta letra nos outros termos vai diminuindo 1 da esquerda para a direita, até o ultimo termo que já não tem mais esta letra.

2.º O expoente da segunda letra é 1 no segundo termo da potencia, e os outros expoentes desta letra vão crescendo 1 da esquerda para a direita, até o ultimo termo, no qual o expoente é o mesmo que o da potencia do binômio.

3.º O polynómio resultante é homogêneo e de mesmo grau da potencia do binômio.

Nota. O discípulo poderá agora desenvolver estas potências e obter os resultados seguintes, e os exemplos seguintes.

$$(x+y)^2$$

$$(x+y)^3$$

$$(x+y)^4$$

$$(x+y)^5$$

$$(x+y)^6$$

$$x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

$$x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$$

$$x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

$$x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$$

Coefficientes dos termos

275. Examinando os coefficients das diversas potências, vemos que

1.º O coefficiente do primeiro termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

2.º O coefficiente do segundo termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

3.º O coefficiente do terceiro termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

4.º O coefficiente de qualquer termo for multiplicado pelo coefficiente do termo seguinte, dá a ordem da esse termo o quociente será o coefficiente do termo seguinte.

5.º O coefficiente do ultimo termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

Para esta lei ficar bem comprehendida, vamos illustrar-a sobre a potencia de 5, e daremos o numero de sua ordem para facilitar a multiplicação e o resultado.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 5 & 15 & 20 & 15 & 5 & 1 \\ a^5 & + & 5a^4b & + & 15a^3b^2 & + & 20a^2b^3 & + & 15a^1b^4 & + & 5a^0b^5 & + & b^6 \\ 1.^\circ & & 2.^\circ & & 3.^\circ & & 4.^\circ & & 5.^\circ & & 6.^\circ & & 7.^\circ \end{array}$$

Para comprehendermos esta illustração devemos nota que no 1.º termo da esquerda é o termo da 1.ª ordem, o segundo termo é da 2.ª ordem, o terceiro é da 3.ª ordem, o quarto é da 4.ª ordem, o quinto é da 5.ª ordem, o sexto é da 6.ª ordem, e o sétimo é da 7.ª ordem.

O coefficiente do primeiro termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

O coefficiente do segundo termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

O coefficiente do terceiro termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

O coefficiente do quarto termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

O coefficiente do quinto termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

O coefficiente do sexto termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

O coefficiente do sétimo termo é sempre 1 subentendendo-se a potencia.

Proseguindo assim vemos que os coeficientes de todos os termos são

$$\begin{array}{ccccccc} 1, & 0, & \frac{6 \times 5}{2}, & \frac{15 \times 4}{3}, & \frac{30 \times 2}{4}, & \frac{15 \times 2}{5}, & \frac{6 \times 1}{6} \\ \text{ou } 1, & 0, & 15, & 90, & 16, & 6, & 1, \end{array}$$

Estes coeficientes juntos aos respectivos termos dão

$$a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

276. Segundo a lei que acabamos de ilustrar, vemos que os coeficientes

$$\begin{array}{l} \text{de } (a+b)^2 \text{ são } 1, 2, 1 \\ \text{de } (a+b)^3 \text{ são } 1, 3, 3, 1 \\ \text{de } (a+b)^4 \text{ são } 1, 4, 6, 4, 1 \\ \text{de } (a+b)^5 \text{ são } 1, 5, 10, 10, 5, 1 \\ \text{de } (a+b)^6 \text{ são } 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. \end{array}$$

Devemos notar aqui que os coeficientes crescem até ao meio da potência, e depois decrescem na mesma razão; por isso basta somente calcular os coeficientes até ao meio mais 1 da potência ou até o meio da potência mais 1, e depois repetir os mesmos números em ordem inversa. Assim, se a potência for par, 6 por exemplo, devemos calcular até o $1,4$ ($\frac{6}{2}+1$) termo; se a potência for ímpar, 11 por exemplo, basta-nos calcular 6 termos $\frac{11+1}{2}$.

277. Qualquer potência de 1 é sempre 1; assim, $1 \times 1 = 1$, $1 \times 1 \times 1 = 1$. Quando 1 é factor, não influe sobre a quantidade por que se multiplica, assim, $1 \times x = x$, $ab \times 1 = ab$.

Potenciar as negativas quantidades por meio do Binómio de Newton:

- | | |
|---|---------|
| 1. Elevar $x+y$ á terceira potencia. | Resp. ? |
| 2. Elevar $x-y$ á quarta potencia. | ? |
| 3. Elevar $m+n$ á quinta potencia. | ? |
| 4. Elevar $x-x$ á sexta potencia. | ? |
| 5. Qual é a sétima potencia de $a+b$? | ? |
| 6. Achar a terceira potencia de $a-1$. | ? |
| 7. Qual é a quarta potencia de $b-1$. | ? |
| 8. Elevar 1 a á quinta potencia. | ? |

278. Quando os termos de um binómio tem coeficientes e expoentes, abrevia-se a potenciação, operando-se com um binómio simples, e depois substituindo-se os seus diversos termos pelos valores correspondentes do binómio dado.

Exemplo. Qual é a terceira potencia de $2x - ac^2$?

Solução. Se substituirmos x por m , e a por n teremos $2m - n^2$ = binómio simples. Logo $(2m - n^2)^3 = 8m^3 - 12m^2n^2 + 6mn^4 - n^6$. Rectifique agora comparando com a

Se substituímos agora as diversas potências de m e n por seus respectivos valores nas potências de $2x$ e ac^2 , teremos

$$\begin{array}{l} 1^\circ \text{ Termo } m^3 = \dots \\ \text{Terço } 12m^2n^2 = 12 \times 4x^2 \\ \text{Terço } 6mn^4 = \dots \end{array}$$

Potenciar dando tudo os seguintes exemplos

- Qual é a terceira potencia de $3a^2 - 5b$?
Resp. $27a^6 - 135a^4b + 225a^2b^2 - 125b^3$.
- Qual é a terceira potencia de $2ax + by$?
Resp. $8a^3x^3 + 12a^2x^2by + 6abxby^2 + b^3y^3$.
- Qual é a quinta potencia de $x^2 + 3y^2$?
Resp. $x^{10} + 15x^8y^2 + 90x^6y^4 + 270x^4y^6 + 405x^2y^8 + 243y^{10}$.

279. Quando um dos termos do binómio é uma fracção, podemos de dois modos achar o quadrado do binómio: multiplicando a fracção ou transformando o binómio em uma fracção impropria

(1.º Modo)

$$\begin{array}{r} x + \frac{1}{2} \\ x + \frac{1}{2} \\ \hline x^2 + \frac{1}{2}x \\ \quad \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \\ \hline x^2 + x + \frac{1}{4} \end{array}$$

(2.º Modo)

$$\begin{array}{l} x + \frac{1}{2} = \frac{2x+1}{2} \\ \left(\frac{2x+1}{2}\right)^2 = \frac{4x^2+4x+1}{4} \\ \text{ou } x^2 + x + \frac{1}{4} \end{array}$$

Solução. Multiplicando-se o binómio por si mesmo, o quadrado é $x^2 + x + \frac{1}{4}$. Reduzindo o binómio a uma fracção adequada o quadrado é a fracção achamos o mesmo resultado

Outros modos de formar um quadrado

280. Como já vimos anteriormente o modo directo e simples de achar o quadrado de um numero é multiplicar esse numero por si; assim o quadrado de 12 é $12 \times 12 = 144$. Ha porém outros modos de formar o quadrado de um numero, os quaes precisamos tambem conhecer.

287. Em Algebra as raizes exprimem-se de dois modos, a saber:

- 1º Pelo signal radical
- 2º Pelo expoente fraccionario

288. Primeiro modo. O signal radical é a figura $\sqrt{\quad}$ que se escreve sobre o numero a ser extrahido. Assim, a raiz quadrada de 16 se escreve $\sqrt{16}$. O indice da raiz indica o valor da raiz indicada pelo indice.

289. Indico da raiz é o numero escrito

- $\sqrt[4]{16} = 4$ lê-se: A raiz quadrada de 16 é igual a 4.
 $\sqrt[3]{8} = 2$ lê-se: A raiz cubica de 8 é igual a 2.
 $\sqrt[4]{625} = 5$ lê-se: A quarta raiz de 625 é igual a 5.

Nestes exemplos, os algarismos 2, 3 e 4

290. Segundo modo. Exprime-se tambem

Esta expressão é igual a $\sqrt[4]{16}$. Tambem $x^{\frac{1}{2}}$ mostra que de x^2 devemos extrahir a raiz cubica. Esta expressão é igual a $\sqrt[3]{x^2}$.

O valor de uma quantidade não ficará alterado, se trocarmos o expoente fraccionario por outro de igual valor. Assim, $a^{\frac{1}{2}} = a^{\frac{2}{4}} = a^{\frac{3}{6}} = a^{\frac{4}{8}}$ etc.

291. Quando um numero é composto de dois factores, cada um dos quaes é quadrado perfeito, a raiz quadrada do numero é igual a raiz quadrada do primeiro factor multiplicada pela raiz quadrada do segundo factor. Porque é composto de 4×4 , da mesma forma $\frac{1}{2}$ é quadrado pois é igual a $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$.

292. Os numeros que não são quadrados perfectos, podem ser decompostos em um numero inteiro e uma fracção decimal. Assim, 102277... isto é, 3 inteiros e uma fracção decimal. A raiz quadrada de um numero que não é quadrado perfeito, é irracional.

293. Os quadrados dos numeros inteiros, desde 1 até 100, são os seguintes:

Quadrados perfectos: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100.
Raizes quadradas : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.

Nesta tabella vemos que a raiz quadrada de 1 é 1, e que todos os quadrados, desde 1 até 100 exclusivo, tem a raiz quadrada com um só algarismo; e por isso concluímos que todo quadrado que não tiver mais de dois algarismos, a sua raiz quadrada terá um só algarismo.

294. Quadrando agora as dez primeiras dezenas, temos os seguintes resultados:

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100
 100, 400, 900, 1600, 2500, 3600, 4900, 6400, 8100, 10000.

Destes resultados vemos que todos os quadrados desde 100 até 1000 exclusivo constam de tres ou quatro algarismos, e por isso concluímos que todo quadrado que não tiver mais de seis algarismos e não mais de quatro, terá a raiz quadrada com dois algarismos.

Do mesmo modo se pôde tambem provar que o quadrado de um numero que contém mais de quatro algarismos e não mais de seis, terá a raiz quadrada com tres algarismos, e assim por diante. Daqui formulamos o seguinte principio:

295. Quando um numero contiver um ou dois algarismos, a sua raiz terá um só, quando contiver tres ou quatro, a raiz terá dois, quando contiver cinco ou seis, a raiz terá tres, e assim por diante.

Nota. Quando um numero não for um quadrado perfeito, a sua raiz quadrada será irracional. Quando um numero não for um quadrado perfeito, a sua raiz quadrada será irracional.

296. Como já vimos na secção 281, qualquer numero de mais de um algarismo, pôde ser decomposto em duas partes ou quantidades, sendo uma as dezenas e a outra as unidades. Assim o numero 23 pôde ser decomposto em 2 dezenas e 3 unidades; o numero 256 pôde ser decomposto em 25 dezenas e 6 unidades. De sorte que se representarmos as dezenas por d e as unidades por u , qualquer numero poderá ser representado por $d+u$, e o seu quadrado por $(d+u)^2$.

Ora, os dois ultimos termos ou parcelas deste quadrado que são $2du+u^2$ tambem podem ser expressas deste modo: $(2d+u)u$, isto é, duas vezes as dezenas mais as unidades multiplicadas pelas unidades. Desse modo, a fórmula do quadrado pôde tambem ser assim expressa: $(d+u)^2 = d^2 + (2d+u)u$.

Esta nova fórmula facilita a extracção da raiz quadrada, e pôde ser traduzida do seguinte modo:

O quadrado de qualquer numero de mais de um algarismo.

Ex. 1.º O quadrado de 23, que é igual a duas dezenas e 3 unidades, é o seguinte:

Quadrado de duas dezenas
(2 vezes 20 de 400 + 1)

297. Vemos agora operar no sentido inverso, isto é,

Problema. Qual é a raiz quadrada de 529?

Solução. Como se tem o numero dado, quer-se saber qual o maior quadrado perfeito contido em 529. Para isso, divide-se o numero em classes de duas cifras cada uma, começando da direita para a esquerda. Assim, 529 fica dividido em 5 e 29. O maior quadrado perfeito contido em 5 é 4 (2²). Subtrahindo 4 de 5, resta 1. Desce-se a próxima classe, 29, e tem-se 129. O maior quadrado perfeito contido em 129 é 121 (11²). Subtrahindo 121 de 129, resta 8. Portanto, a raiz quadrada de 529 é 23.

Um segundo a fórmula acima, o resto 8 contém duas vezes o divisor 23, e o resto 8.

Logo, a raiz quadrada de 529 é 23. O resto 8 contém duas vezes o divisor 23, e o resto 8.

Logo, a raiz quadrada de 529 é 23. O resto 8 contém duas vezes o divisor 23, e o resto 8.

Logo, a raiz quadrada de 529 é 23. O resto 8 contém duas vezes o divisor 23, e o resto 8.

Modo pratico de extracção

Problema. Qual é a raiz quadrada de 182250?

69,1

Logo, a raiz quadrada de 182250 é 69,1. O resto 8 contém duas vezes o divisor 23, e o resto 8.

Dobra-se o divisor 4 que fica 8 e escreve-se abaixo como um dividendo indicante (Chama-se divisor indicante, porque elle indica o algarismo seguinte da raiz).

Para se achar o algarismo seguinte da raiz, separa-se em 22 o ultimo algarismo da direita e desce-se o numero resultante pelo divisor indicante e o quociente será o segundo algarismo da raiz. Nesta divisão despreza-se o resto.

Dividido-se 22 por 8, o quociente é 2 e por isso o segundo algarismo da raiz é 2. Escreve-se 2 na raiz e também junto com o divisor indicante que fica 82 e se torna divisor completo. Multiplica-se pelo 2 o resto da divisão anterior e o producto 16 se subtrah da raiz e o resto 6 contém duas vezes o divisor 23, e o resto 6.

Logo, a raiz quadrada de 529 é 23. O resto 8 contém duas vezes o divisor 23, e o resto 8.

Prova. 23² = 529

Regra. I Para se extrahir a raiz quadrada de um numero, divide-se este numero em classes de dois algarismos cada uma, começando pelas unidades.

II Acha-se o maior quadrado perfeito contido na ultima classe e escreve-se a sua raiz no lado direito, em forma de divisor e acréscito o primeiro algarismo da raiz. Subtrahese o quadrado perfeito daquella classe, e o resto junto com a classe seguinte formará o novo dividendo.

III Dobra-se a parte da raiz achada e escreve-se como um divisor indicante ao lado do dividendo; acha-se quantas vezes o divisor indicante cabe no dividendo, e esse numero junta-se ao primeiro algarismo da raiz e tambem ao divisor.

IV. Multiplica-se agora o divisor completo pelo numero achado, e o producto subtrahese do dividendo. O resto junto com a classe seguinte formará o novo dividendo.

V Desce-se com o divisor o algarismo do resto da direita, e continúa-se o processo como acima até todas as classes estiverem divididas.

Nota. Quando um divisor indicante é maior do que o respectivo dividendo, escreve-se uma cifra na raiz outra no divisor e desce-se o ultimo algarismo do dividendo e continúa-se a operação. Se houver resto do processo se achar a raiz da ultima classe, o numero será um quadrado inteiro, e a sua raiz approximada será um numero fraccionario.

Para se achar a fracção da raiz, junta-se a classe do resto ao resto, e escreve-se uma virgula decimal no fim da parte inteira da raiz, para se indicar que os algarismos que seguem são decimais.

Extrair a raiz quadrada dos seguintes números

1.	$144 = ?$	Resp.	65.	5
2.	$121 = ?$	"	39	6.
3.	$81 = ?$	"	85	7
4.	$900 = ?$	"	97	8

Extracção da raiz quadrada das fracções

298. Desde que o quadrado de uma fracção se obtem quadrando separadamente cada um de seus termos, segue-se que, se os dois termos de uma fracção forem quadrados perfectos, a raiz quadrada da fracção se acha extrahindo a raiz quadrada de cada um dos seus termos

Problema. Qual é a raiz quadrada de $\frac{1}{4}$?

1. Qual é a raiz quadrada de $\frac{1}{4}$?	Resp.	$\frac{1}{2}$.
2. Qual é a raiz quadrada de $\frac{25}{36}$?	"	$\frac{5}{6}$.
3. Qual é a raiz quadrada de $\frac{16}{81}$?	"	$\frac{4}{9}$.
4. Qual é a raiz quadrada de $\frac{81}{100}$?	"	$\frac{9}{10}$.
5. Qual é a raiz quadrada de $\frac{25}{144}$?	"	$\frac{5}{12}$.
6. Qual é a raiz quadrada de $\frac{100}{121}$?	"	$\frac{10}{11}$.

Raiz quadrada approximada

299. Para illustrarmos o methodo de achar a raiz quadrada approximada de um quadrado imperfeito, vamos achar a raiz quadrada de 2 com a differença menor de

Reduzindo 2 a fracção cujo denominador seja 9 (quadrado de 3, denominador da fracção $\frac{1}{9}$), teremos $2 = \frac{18}{9}$. Ora, a raiz quadrada de 18 é um numero maior do que 1, e menor do que 5, então a raiz quadrada de $\frac{18}{9}$ é maior do que $\frac{1}{3}$ e menor do que $\frac{5}{3}$; portanto, $\frac{1}{3}$ é a raiz approximada de 2 com a differença menor do que $\frac{1}{9}$.

Para acharmos a raiz quadrada de um numero inteiro com uma differença menor do que uma fracção dada, temos a seguinte

Regra. Multiplica-se o numero dado pelo quadrado do denominador da fracção que determina o grau da approximação, e deste producto extrah-se a raiz quadrada mais approximada em inteiros, e divide-se pelo denominador da fracção dada.

Achar a raiz quadrada approximada dos seguintes números

1. De 6 com uma differença menor do que $\frac{1}{10}$.	Resp.	$2\frac{1}{10}$.
2. De 7 com uma differença menor do que $\frac{1}{10}$.	"	$2\frac{1}{10}$.
3. De 15 com uma differença menor do que $\frac{1}{10}$.	"	$3\frac{1}{10}$.
4. De 27 com uma differença menor do que $\frac{1}{10}$.	"	$5\frac{1}{10}$.
5. De 14 com uma differença menor do que $\frac{1}{10}$.	"	$3\frac{1}{10}$.

Extracção da raiz quadrada dos monomios

300. Para acharmos o modo de extrahir a raiz quadrada dos monomios, devemos notar como se fórma o seu quadrado

Segundo a regra da elevação de um monomio a qualquer potencia (n.º 267), vemos que

$$5a^2b^3c^2 = 5a^2b^3c^2 \times 5a^2b^3c^2 = 25a^4b^6c^4.$$

Para quadrarmos um monomio, temos de quadrar o seu coefficiente numeral, e depois multiplicar o expoente de cada factor litteral por 2. Então, para acharmos a raiz quadrada de um monomio que seja quadrado perfeito, temos a seguinte regra.

Regra. Extrah-se a raiz quadrada do coefficiente numeral, e divide-se o expoente de cada factor litteral por 2

Nota. Esta regra só tem applicação quando o monomio é um quadrado perfeito, quando o monomio é quadrado imperfeito, a sua raiz quadrada pode somente ser indicada. Assim, a raiz quadrada de $5ab$ é $\sqrt{5ab}$.

301. Signaes da raiz. Se multiplicarmos $+a$ por $+a$ o producto será $+a^2$; se multiplicarmos $-a$ por $-a$, o producto será também $+a^2$. Então a raiz quadrada de $+a^2$ pode ser $+a$ ou $-a$, assim também a raiz quadrada de $25a^4b^6c^4$ pôde ser $+5a^2b^3c^2$ ou $-5a^2b^3c^2$. Daqui concluímos que a raiz quadrada de um monomio positivo, pôde ter o signal $+$ ou $-$, e esta resposta dupla se exprime com o signal dobrado \pm , assim, $\sqrt{25a^4b^6c^4} = \pm 5a^2b^3c^2$, que se lê. A raiz quadrada de $9a^2$ é igual a mais ou menos 3a.

302. Se um monomio é negativo, não é possível extrahir a sua raiz quadrada, porque o quadrado de qualquer quantidade le positiva ou negativa é sempre positivo. De sorte que $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-b}$, são expressões algébricas, que indicam operações impossíveis, e por isso se denominam quantidades imaginarias. Quando, pois, encontrarmos expressões desta natureza nas equações do segundo grau, é porque ha algum absurdo no problema, ou impossibilidade na equação.

Achar a raiz quadrada de cada um dos seguintes polinômios:

303. Desde que $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$, segue-se que $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}}$

$\frac{a}{b}$, isto é, para se achar a raiz quadrada de uma fração monômica extrai-se a raiz quadrada de ambos os seus termos.

O. Achar a raiz quadrada de $\frac{49}{36}$. Resp. $\frac{7}{6}$.

O. Achar a raiz quadrada de $\frac{1}{16}$.

Extração da raiz quadrada dos polinômios

304. Antes de formularmos a regra para a extração da raiz quadrada dos polinômios, examinemos primeiro a relação que ha entre os varios termos de uma quantidade e o seu quadrado.

$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2(a + b)c + c^2$$

Daqui vemos que o quadrado de qualquer polinômio é formado pela seguinte lei:

305. O quadrado de qualquer polinômio é igual ao quadrado do primeiro termo, mais duas vezes o producto do primeiro termo multiplicado pelo segundo, mais o quadrado do segundo mais duas vezes os dois primeiros termos multiplicados pelo terceiro, mais o quadrado do terceiro, mais duas vezes os tres primeiros termos multiplicados pelo quarto, e assim por diante.

I Problema. Qual é a raiz quadrada de $a^2 + 2ab + b^2$?

Solução. Como se acham os termos da raiz quadrada?

O primeiro termo da raiz quadrada é a .

Logo-se o resto do polinômio.

O segundo termo da raiz quadrada é b , pois se acha o termo deste resto pelo dobro da raiz a e o da que é $2a$, temos o quociente b que é

Operação

$$\begin{array}{r} a + 2ab + b^2 \\ a^2 \quad \quad \quad \text{Raiz} \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 2ab \quad \quad \quad \text{Raiz} \\ \hline \end{array}$$

da raiz. Multiplicando agora $2a$ por b , obtemos $2ab + b^2$ resto 0 , nada resta. Portanto $a + b$ é a raiz quadrada.

II Problema. Qual é a raiz quadrada de $4a^4 - 12a^3 + 5a^2 + 1$?

Operação

$$\begin{array}{r} 4a^4 - 12a^3 + 5a^2 + 1 \quad \text{Raiz} \\ 4a^4 \quad \quad \quad \text{Raiz} \\ \hline \end{array}$$

$$0 \quad 12a^3 + 5a^2 + 1$$

$$0 \quad 4a^2 + 6a + 1$$

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

Solução. A raiz quadrada do 1º termo do polinômio é $2a^2$ que será o primeiro termo da raiz. Multiplicando o 1º termo da raiz pelo dobro da raiz

O resto do polinômio é $4a^4 - 12a^3 + 5a^2 + 1$ divide-se pela raiz $2a^2$ e obtemos $2a^2 - 3a + 1$ que será o segundo termo da raiz. Multiplicando o segundo termo da raiz pelo dobro da raiz obtemos $4a^4 - 12a^3 + 5a^2 + 1$ resta 0 .

Logo-se o resto do polinômio. Logo-se o resto do polinômio. Logo-se o resto do polinômio.

Regra. I. Ordena-se o polinômio em relação da potências decrescentes de uma letra; então acha-se o primeiro termo da raiz, extrahindo a raiz quadrada do primeiro termo do polinômio, e escreve-se o resultado á direita, e subtrahido do seu quadrado do polinômio dado.

II. Divide-se o primeiro termo do resto pelo dobro da parte da raiz já achada, e o resultado que é o segundo termo da raiz, junta-se ao divisor. Multiplica-se o divisor assim formado pelo segundo termo da raiz, e o producto subtrahido do resto.

III. Dobram-se os termos da raiz já achados, para formar um divisor indicante, divide-se o primeiro termo do resto pelo primeiro termo do divisor, e o resultado, que é o terceiro termo da raiz, junta-se ao divisor. Multiplica-se o divisor assim completo pelo terceiro termo da raiz, e o producto subtrahido do ultimo resto. E assim se procede até passar todos os termos do polinômio.

$$x^2 + 12x + 4.$$

Resp. $x = 2.$
2a $3.$

304

se é a quadrado de $a + b$.

307

das raízes quadradas dos termos extremos. De sorte que,

do meio

que se tem $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

Radicaes do segundo grau

308

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

309

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

temos $12x = 2 \times 6x$ e $4 = 2 \times 2$ e por isso

As raízes quadradas de $12x + 4$ são $2\sqrt{3x+1}$ e $-2\sqrt{3x+1}$.

310 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

311 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

312 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

313 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

314 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

315 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

316 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

317 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

318 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

319 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

320 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

321 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

322 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

323 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

324 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

325 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

326 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

327 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

328 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

329 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

330 O coeficiente do radical $\sqrt{12x+4}$ é $2\sqrt{3}$.

313. Uma fracção radical do segundo grau pôde também ser reduzida a uma forma mais simples.

Multiplicam-se os dois termos por uma quantidade que torne o denominador quadrado perfeito; decompõe-se a fracção em dois factores, dos quaes um seja quadrado perfeito; extrai-se a raiz quadrada deste factor e prefixa-se ao outro factor que fica debaixo do signal radical.

Problema. Reduzir $\sqrt{\frac{2}{3}}$ á sua forma mais simples.

Solução. $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3} \times \frac{3}{3}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{3 \times 3}} = \sqrt{\frac{2 \times 3}{9}} = \frac{\sqrt{2 \times 3}}{\sqrt{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Reduzir as seguintes fracções

11. $\sqrt{\frac{3}{5}}$ Resp. $\frac{1}{5} \sqrt{15}$

12. $\sqrt{\frac{5}{8}}$ " $\frac{1}{2} \sqrt{10}$

13. $\sqrt{\frac{3}{8}}$ " $\frac{3}{2} \sqrt{2}$

314. Desde que $a = \sqrt{a^2}$, e $2\sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{4 \times 3} = \sqrt{12}$ é evidente que qualquer quantidade pôde ser transformada em um radical do segundo grau, sendo elevada ao quadrado e posta debaixo do signal radical. Pelo mesmo principio, o coefficiente de um radical pode passar para debaixo do signal radical

17. Transformar 6 em um radical do 2º grau.

Solução. $6 = \sqrt{6 \times 6} = \sqrt{36}$

18. Transformar $2a$ em um radical do 2º grau.

Resp. $\sqrt{4a^2}$

19. Expressar a quantidade $3\sqrt{5}$ com o coefficiente debaixo do radical.

Resp. $\sqrt{45}$

20. Passar o coefficiente de $3\sqrt{12}$ para debaixo do radical

Resp. $\sqrt{108}$

21. Passar o coefficiente de $5\sqrt{3}$ para debaixo do radical.

Resp. $\sqrt{75}$

22. Passar o coefficiente de $4\sqrt{2}$ para debaixo do radical.

Resp. $\sqrt{32}$

Adição dos radicaes do segundo grau

315. I Problema. Qual é a somma de $3\sqrt{2}$ e $5\sqrt{2}$

Solução. É evidente que 3 vezes mais 5 vezes que qualquer quantidade devem fazer 8 vezes essa quantidade. $3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

II Problema. Qual é a somma de $\sqrt{2}$ e $\sqrt{8}$?

$$= 1\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

Solução. Reduzindo o segundo radical á sua forma mais simples, e decompõe-se o primeiro termo: $2\sqrt{2} = 1\sqrt{2} + 1\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$

Admitindo estas quantidades pôde o sinal de adição entre elles A soma de $2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

Regra. Reduz-se cada radical á sua forma mais simples; os radicaes resultantes forem semelhantes, somam-se os coefficientes, e a somma prefixa-se ao radical commum, mas se forem dissimilares, juntam-se com o signal de adição.

Ex. 1. a somma das seguintes grupos de radicaes

Resp.

1.	$\sqrt{2} + \sqrt{8}$	$3\sqrt{2}$
2.	$\sqrt{3} + \sqrt{12}$	$3\sqrt{3}$
3.	$\sqrt{5} + \sqrt{20}$	$3\sqrt{5}$
4.	$\sqrt{7} + \sqrt{28}$	$3\sqrt{7}$
5.	$\sqrt{10} + \sqrt{40}$	$3\sqrt{10}$
6.	$\sqrt{15} + \sqrt{60}$	$3\sqrt{15}$
7.	$\sqrt{18} + \sqrt{72}$	$6\sqrt{2}$
8.	$\sqrt{27} + \sqrt{108}$	$6\sqrt{3}$
9.	$\sqrt{45} + \sqrt{180}$	$6\sqrt{5}$
10.	$\sqrt{75} + \sqrt{300}$	$6\sqrt{3}$
11.	$\sqrt{98} + \sqrt{392}$	$6\sqrt{2}$
12.	$\sqrt{147} + \sqrt{588}$	$6\sqrt{3}$
13.	$\sqrt{200} + \sqrt{800}$	$6\sqrt{2}$
14.	$\sqrt{252} + \sqrt{1008}$	$6\sqrt{3}$
15.	$\sqrt{320} + \sqrt{1280}$	$6\sqrt{5}$
16.	$\sqrt{432} + \sqrt{1728}$	$6\sqrt{3}$
17.	$\sqrt{500} + \sqrt{2000}$	$6\sqrt{5}$
18.	$\sqrt{675} + \sqrt{2700}$	$6\sqrt{3}$
19.	$\sqrt{800} + \sqrt{3200}$	$6\sqrt{2}$
20.	$\sqrt{960} + \sqrt{3840}$	$6\sqrt{3}$

Subtracção dos radicaes do segundo grau

316. I Problema. Subtraindo $3\sqrt{2}$ de $5\sqrt{2}$, quanto resta?

Solução. É evidente que 5 vezes mais 3 vezes que qualquer quantidade, é igual a 2 vezes a mesma quantidade.

$$= 2\sqrt{2}$$

II Problema. Qual é a differença entre $\sqrt{8}$ e $\sqrt{2}$?

$$= \sqrt{8} - \sqrt{2} = 2\sqrt{2} - \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

Solução. Reduzindo o radical maior á sua forma mais simples, e operando a subtracção, vemos que a differença é $\sqrt{2}$.

Se os radicaes não forem semelhantes, é claro que a sua differença não pôde ser indicada. Assim, subtraindo $3\sqrt{2}$ de $5\sqrt{3}$ o resultado é $5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$.

Regra. Reduzem-se as radicaes á sua fórma mais simples, e a differença entre o coefficiente do minuendo e o do subtraheudo prefixa-se ao radical commum.

Se os radicaes não forem semelhantes, indica-se a sua differença com o signal de subtracção.

Exemplos para resolver.

1. $\sqrt{18} - \sqrt{2}$.	Resp. $2\sqrt{2}$.
2. $\sqrt{45a^2} - \sqrt{5a^2}$.	" $2a\sqrt{5}$.
3. $\sqrt{48} - \sqrt{6}$.	" $2\sqrt{6}$.
4. $\sqrt{112a^2c^2} - \sqrt{32a^2c^2}$.	" $8ac\sqrt{2}$.
5. $\sqrt{27b^3a^3} - \sqrt{12b^3a^3}$.	" $ba\sqrt{3a}$.
6. $5a\sqrt{27} - 3a\sqrt{48}$.	" $3a\sqrt{3}$.
7. $2\sqrt{\frac{3}{2}} - 3\sqrt{\frac{1}{2}}$.	" 0 .
8. $\sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{1}{8}}$.	" $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Multiplicação dos radicaes do segundo grau

317. I Problema Qual é o producto de \sqrt{a} multiplicado por \sqrt{b} ?

Solução. Desde que $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$ segue-se que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

II Problema. Multiplicar $a\sqrt{b}$ por $c\sqrt{d}$.

Solução. $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = a \times c \times \sqrt{b} \times \sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$.

Regra. Multiplicam-se entre si as quantidades que estão debaixo do radical, e o producto escreve-se debaixo do radical.

Se houver coefficientes, multiplicam-se entre si, e o resultado escreve-se como coefficiente do radical, e reduz-se esta expressão á sua fórma mais simples.

Exemplos para resolver.

1. Multiplicar $\sqrt{8}$ por $\sqrt{2}$.
Solução. $\sqrt{8} \times \sqrt{2} = \sqrt{16} = 4$.
2. Multiplicar $2\sqrt{12}$ por $3\sqrt{3}$.
Solução. $2\sqrt{12} \times 3\sqrt{3} = 2 \times 3 \times \sqrt{12 \times 3} = 6\sqrt{36} = 6 \times 6 = 36$.

3. Multiplicar $\sqrt{8}$ por $\sqrt{2}$.	Resp. 4 .
4. Multiplicar $3\sqrt{4}$ por $5\sqrt{9}$.	" 60 .
5. Multiplicar $\sqrt{27}$ por $\sqrt{3}$.	" 9 .
6. Multiplicar $3\sqrt{2}$ por $2\sqrt{5}$.	" $6\sqrt{10}$.
7. Multiplicar $8\sqrt{3}$ por $2\sqrt{3}$.	" 18 .
8. Multiplicar $\sqrt{10}$ por $\sqrt{16}$.	" $4\sqrt{10}$.
9. Multiplicar $2\sqrt{12}$ por $3\sqrt{3}$.	" $30\sqrt{2}$.
10. Multiplicar $\sqrt{a^2bc}$ por \sqrt{abc} .	" a^2b^2c .
11. Multiplicar $2\sqrt{3ab}$ por $3\sqrt{2ab}$.	" $6ab\sqrt{6}$.
12. Multiplicar $\sqrt{\frac{1}{2}}$ por $\sqrt{\frac{1}{2}}$.	" $\frac{1}{2}$.

318. Quando dois polynomios têm radicaes do segundo grau, multiplicam-se do mesmo modo que os outros polynomios, observando só a direcção contida na regra precedente, como se vê na operação ao lado. A resposta é $6 - \sqrt{5}$ que reduzida, dá $1 - \sqrt{5}$.

13. Multiplicar $3 + \sqrt{2}$ por $2 - \sqrt{2}$.	Resp. 2 .
14. Multiplicar $3 + 2\sqrt{2}$ por $5 - 3\sqrt{2}$.	" $3 + 12$.
15. Multiplicar $\sqrt{2}$ por $\sqrt{2}$.	" 2 .
16. Multiplicar $\sqrt{2}$ por $\sqrt{2}$.	" 2 .

Divisão dos radicaes do segundo grau

319. I Problema. Qual é o quociente de \sqrt{ab} por \sqrt{a} ?

Solução. Desde que $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ segue-se que $\sqrt{ab} \div \sqrt{a} = \sqrt{b}$.

II Problema. Qual é o quociente de $ac\sqrt{bd}$ por $a\sqrt{b}$?

Solução. Desde que $a\sqrt{b} \times c\sqrt{d} = ac\sqrt{bd}$ segue-se que $ac\sqrt{bd} \div a\sqrt{b} = c\sqrt{d}$.

Regra. Dividem-se as quantidades que estão debaixo do signal radical, e o quociente escreve-se debaixo do signal.

Se houver coefficients, dividem-se, e o quociente prefixa-se ao quociente que está debaixo do radical.

Exemplos para resolver

1. Dividir $8\sqrt{72}$ por 9

Solução $\frac{8\sqrt{72}}{9} = \frac{8}{9} \sqrt{\frac{72}{1}} = \frac{8}{9} \sqrt{72}$

2. Dividir $1\sqrt{54}$ por $1\sqrt{6}$

3. Dividir $6\sqrt{54}$ por $3\sqrt{1}$

4. Dividir $6\sqrt{24}$ por $2\sqrt{1}$

5. Dividir $1\sqrt{10}$ por $1\sqrt{1}$

6. Dividir $1\sqrt{12}$ por $1\sqrt{1}$

7. Dividir $1\sqrt{16}$ por $1\sqrt{1}$

8. Dividir $1\sqrt{1}$ por $1\sqrt{1}$

320 Uma fracção, cujo denominador é monómio ou binómio que contém radicais do segundo grau, pode ser reduzida a uma fracção equivalente com um denominador racional.

Illustração. Quando uma fracção tem a forma $\frac{a}{b}$, se multiplicarmos o numerador e o denominador por \sqrt{b} , o denominador se tornará racional. Assim

$$\frac{a}{b} = \frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{b}} = \frac{a\sqrt{b}}{b\sqrt{b}}$$

Desde que a soma de duas quantidades multipliquemos o numerador e o denominador por $b - \sqrt{b}$, o denominador se tornará racional, porque será $b^2 - b$.

A fracção tiver a forma $\frac{a}{b + \sqrt{c}}$, e nós multiplicarmos ambos os termos por $b - \sqrt{c}$, o denominador se tornará racional, porque será $b^2 - c$.

$$\frac{a}{b + \sqrt{c}} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{(b + \sqrt{c})(b - \sqrt{c})} = \frac{a(b - \sqrt{c})}{b^2 - c}$$

Pela mesma razão, se o denominador for $b - \sqrt{c}$, o multiplicador será $b + \sqrt{c}$, se o denominador for $\sqrt{b} + \sqrt{c}$, o multiplicador será $\sqrt{b} - \sqrt{c}$, e se o denominador for $\sqrt{b} - \sqrt{c}$, o multiplicador será $\sqrt{b} + \sqrt{c}$.

Regra. Se o denominador for um monómio, multipliquemos ambos os termos da fracção pelo radical que está debaixo do radical mais elevado. Se o denominador for um binómio, multipliquemos ambos os termos pela binómio dado no denominador com o segundo sinal trocado, e o denominador se tornará racional.

Reduzir as seguintes fracções a outras equivalentes com denominador racional.

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{7}}, \frac{1}{\sqrt{11}}, \frac{1}{\sqrt{13}}, \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{1}{\sqrt{19}}, \frac{1}{\sqrt{23}}, \frac{1}{\sqrt{29}}, \frac{1}{\sqrt{31}}, \frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{1}{\sqrt{41}}, \frac{1}{\sqrt{43}}, \frac{1}{\sqrt{47}}, \frac{1}{\sqrt{53}}, \frac{1}{\sqrt{59}}, \frac{1}{\sqrt{61}}, \frac{1}{\sqrt{67}}, \frac{1}{\sqrt{71}}, \frac{1}{\sqrt{73}}, \frac{1}{\sqrt{79}}, \frac{1}{\sqrt{83}}, \frac{1}{\sqrt{89}}, \frac{1}{\sqrt{97}}$$

Solução das equações que contêm radicais

321. Quando em uma equação, uma quantidade desconhecida está debaixo do signal radical, temos de tornar esta quantidade racional para podermos resolver a equação, isto é, temos de fazer desaparecer o signal radical sem alterar a igualdade da equação, para podermos achar o valor da incógnita.

Como já vimos na secção 168, prop. 5.ª, se duas quantidades iguaes forem elevadas á mesma potencia os dois resultados serão iguaes. Então para fazermos desaparecer o signal radical, temos duas direcções:

Primeira direcção. Quando uma equação contém uma só expressão radical, transpõe-se esta expressão para um dos lados da equação, e os outros termos, para o outro, e depois quadrando os dois membros, faremos desaparecer o signal radical.

Problema. Qual é o valor de x na equação, $\sqrt{x-1} + 1 = 2$?

Solução. Transpondo o termo 1 para o direito, temos $\sqrt{x-1} = 1$. Quadrando agora os dois membros da equação, temos $x-1 = 1$ ou $x = 2$.
E' necessario que o discipulo se lembre que o quadrado de $\sqrt{x-1}$ é $x-1$, isto é, a mesma quantidade sem o signal radical. O quadrado de $\sqrt{3}$ é 3.

Operação

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} + 1 &= 2 \\ \sqrt{x-1} &= 2-1=1 \\ x-1 &= 1 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Segunda direcção. Quando ha duas expressões radicais, é geralmente preferivel escrever uma, de um lado da equação, e a outra, do outro, antes de quadrar os seus membros.

Problema. Qual é o valor de x na equação, $\sqrt{x-5} + 3 = 4$?

Solução. Transpondo-se o termo x^2 para a direita e

Operação

$$6 \text{ de } 14, \text{ e } 12 \text{ de } 12$$

Transpondo-se agora a outra parte da equação para a direita, ter-se-á

$$x = 9 + 12 = 21$$

Como os coeficientes 4 e 12 são divisíveis por 4, podem ser simplificados e a equação ficará sendo $x^2 = 12$. Quando agora os dois membros da eq. forem divididos por 12, ter-se-á

Assim o valor de x nas seguintes equações

$$1. \quad x^2 + 3 = 7,$$

$$2. \quad x^2 + \sqrt{x^2 + 1} = 11,$$

$$3. \quad x^2 - 9 = 1 + \sqrt{x^2 - 4}$$

$$4. \quad x^2 + \sqrt{x^2 - 3} = 7$$

$$5. \quad x^2 = 1$$

$$6. \quad x^2 = 9$$

$$7. \quad x^2 = 1$$

$$8. \quad x^2 = 1$$

$$9. \quad x^2 = 16$$

$$10. \quad x^2 = 1$$

$$11. \quad x^2 = 1$$

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU

322. Uma equação de segundo grau é a que tem a forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde $a \neq 0$.

323. As equações do segundo grau podem ser incompletas ou completas.

Equações incompletas são as que podem ser reduzidas a dois termos, como $x^2 = 25$.

Equações completas são as que podem ser reduzidas a três termos, como $x^2 + 2x = 24$.

324. Quando uma equação aparece já reduzida ao limite dos seus termos, como as duas equações que acima apresentamos como exemplos, é muito fácil conduzir-se a ela e é incompleta ou completa; mas, quando ela aparece muito complicada ou com muitos termos em ambos os membros, o meio mais seguro de conduzi-la à reduzida é sua forma mais simples, isto é, ao seu menor número de termos. Esta redução opera-se do mesmo modo que a solução das equações do primeiro grau, pois consiste unicamente em *integrar os termos fraccionarios da equação transpondo-os, adicionando-os e reduzindo-os ao menor numero em que a equação pode ser expressa*.

325. Simplifiquemos a seguinte equação para se verificar qual é o menor numero de termos a que ella pôde ser reduzida

Equação	$\frac{x^2}{3} - 8 + \frac{5x^2}{12} = \frac{x}{2} - x^2 + \frac{20}{24}$
integrando	$\frac{4x^2 - 32 + 5x^2}{12} = \frac{x}{2} - x^2 + \frac{5}{6}$
transpondo	$\frac{9x^2 - 72 + 10}{12} = \frac{x}{2}$
reduzindo	$24x^2 - 82x + 10 = 6x$

Esta equação, depois de reduzida, apresenta só dois termos que são $x^2 = 9$, e por isso é uma equação incompleta do segundo grau. Se agora generalizarmos esta equação, substituindo o numero 8 pela letra q teremos $x^2 = q$. Esta expressão ou fórmula serve para mostrar o menor numero de termos a que uma equação incompleta pôde ser reduzida. De sorte que reduzir uma equação incompleta à forma $x^2 = q$ quer dizer reduzi-la à forma mais simples em que ella pôde ser expressa.

326. Simplifiquemos agora mais a seguinte equação para se reconhecer qual é o limite do numero de seus termos:

Equação	$\frac{7x^2}{3} + 12 + 7x = \frac{4x^2}{8} + 1x + 40$
integrando	$\frac{7x^2 + 36 + 21x}{3} = \frac{4x^2 + 8x + 12}{8}$
transpondo	$\frac{7x^2 - 4x^2 + 21x - 12x - 120 - 36}{3} = \frac{4x^2 - 8x}{8}$
reduzindo	$3x^2 + 9x = 34$

Esta equação, depois de reduzida, apresenta 3 termos que são $x^2 + 3x = 28$, e por isso é uma equação completa do segundo grau. Se agora generalizarmos esta equação, substituindo o valor de 3 por $2p$, e o valor de 28 por q teremos $x^2 + 2px = q$. Esta expressão mostra o menor numero de termos a que uma equação completa pôde ser reduzida. De sorte que reduzir uma equação completa à fórmula $x^2 + 2px = q$, quer dizer reduzi-la à forma mais simples em que ella pôde ser expressa.

327. Do que ficou exposto concluímos que qualq. r. na eq. do segundo grau, d. se reduz a uma equação incompleta de dois termos com a forma $x^2 = q$, ou a uma equação completa de tres termos com a forma $x^2 + 2px = q$.

Solução. Transpondo para a esquerda os termos que tem a letra x, e tendo x^2 em evidência temos $x^2(1 + 2p) = q$. Dividindo ambos os membros da equação por $(1 + 2p)$, temos $x^2 = \frac{q}{1 + 2p}$.

328. Problema I. Qual é o valor de x na equação $5x^2 - 18 = 3x^2 + 14$?

Solução.

$$5x^2 - 18 = 3x^2 + 14$$

$$5x^2 - 3x^2 = 14 + 18$$

2x² = 32

x² = 16

Logo, x = 4 ou x = -4. Resposta: x = 4 ou x = -4.

329. Em Arithmetica, como se opera somente com números positivos, um quadrado tem só uma raíz, como $4\sqrt{4} = 16$. Mas em Algebra, ha também quadrados de números negativos; assim o quadrado de -4 é $(-4)^2 = 16$, por que menos multiplicado por menos dá mais. Portanto 16 pode ser o quadrado de $+4$ ou de -4 . Do que ficou exposto, vemos que:

1.ª Toda equação incompleta do segundo grau tem duas raízes.

2.ª Estas raízes são numericamente iguaes, mas tem signos oppostos.

II Problema. Achar o valor de x na equação de $5x^2 + 1 = 49$.

$$5x^2 + 1 = 49$$

$$5x^2 = 48$$

Solução. Transpondo o termo 1 para a direita, temos $5x^2 = 48$. Dividindo ambos os membros da equação por 5, temos $x^2 = \frac{48}{5}$.

III Problema. Achar o valor de x na equação $\frac{x^2}{3} + \frac{3x^2}{4} = 5\frac{1}{2}$?

$$\frac{x^2}{3} + \frac{3x^2}{4} = 5\frac{1}{2}$$

$$8x^2 + 9x^2 = 42$$

Solução. $17x^2 = 42$

Logo, $x^2 = \frac{42}{17}$

$$x^2 = \frac{42}{17}$$

$$x = \pm \sqrt{\frac{42}{17}}$$

IV Problema. Achar o valor de x na equação $ax^2 + b = cx^2 + d$.

$$ax^2 + b = cx^2 + d$$

$$ax^2 - cx^2 = d - b$$

$$x^2(a - c) = d - b$$

Solução. Transpondo para a esquerda os termos que tem a letra x, e tendo x^2 em evidência temos $x^2(a - c) = d - b$. Dividindo ambos os membros da equação por $(a - c)$, temos $x^2 = \frac{d - b}{a - c}$.

$$x^2 = \frac{d - b}{a - c}$$

330. Para resolvermos uma equação incompleta do segundo grau, temos a seguinte regra:

Regra. Reduz-se a equação a forma $x^2 = q$, e depois extrai-se a raíz.

Achar o valor de x em cada uma das seguintes equações.

1. $x^2 - 8 = 28$

Resp. $x = \pm 6$

2. $3x^2 - 16 = 83 + x^2$

Resp. $x = \pm 5$

3. $7x^2 - 26 = 4x^2 + 18$

Resp. $x = \pm 4$

4. $x^2x^2 - 12 = 0$

Resp. $x = \pm \sqrt{12}$

5. $5x^2 - 2 = 8 + 35x^2$

Resp. $x = \pm \frac{1}{2}$

6. $\frac{x^2}{4} + 12 = \frac{x^2}{2} + 37$

Resp. $x = \pm 7$

7. $6x^2 - 48 = 2x^2 + 16$

Resp. $x = \pm 4$

8. $\frac{3x^2 + 9}{5} = 15$

Resp. $x = \pm 10$

9. $x^2 - 36 = \frac{x^2}{4} + 12$

Resp. $x = \pm 8$

10. $3x^2 - 200 = \frac{x^2}{3} + 100$

Resp. $x = \pm 12$

Resolver as seguintes equações incompletas do segundo grau.

1. Achar um numero cujos $\frac{2}{3}$ multiplicados pelos seus $\frac{1}{3}$ darão um producto igual a 60.

Solução. Seja x o numero, então

$$\frac{2}{3}x \cdot \frac{1}{3}x = 60$$

2. Multiplicando-se um numero por si mesmo, o producto é 144, qual é o numero?
3. Qual é o numero cujo quadrado mais 16 é metade do seu quadrado mais 16?
Resp. $x = 8$.

Achar as raízes das equações completas

334. Como já sabemos completar o quadrado, resta nos agora somente juntar ao segundo membro da equação o mesmo termo ou quantidade que juntamos ao primeiro, e obtermos resolver a equação.

I Problema. Quais são as raízes da equação $x^2 + 8x - 33 = 0$?

Solução:

Para completar o quadrado, devemos adicionar ao primeiro membro da equação o quadrado da metade do coeficiente de x , isto é, 16 , e ao segundo membro a mesma quantidade, isto é, 16 . Assim, temos:

$$x^2 + 8x - 33 + 16 = 16$$

$$x^2 + 8x - 16 + 33 + 16 = 16$$

$$x^2 + 8x - 16 + 49 = 16 + 16$$

$$x^2 + 8x + 33 = 32$$

$$x^2 + 8x + 16 = 32 - 33$$

$$(x + 4)^2 = -1$$

$$x + 4 = \pm \sqrt{-1}$$

$$x = -4 \pm i$$

Portanto, as raízes da equação são $x = -4 + i$ e $x = -4 - i$.

Verificação: Substitua as raízes encontradas na equação original para verificar se elas satisfazem a equação.

II Problema. Resolver a equação $x^2 - 10x + 16 = 0$.

Solução:

Para resolver a equação, vamos completar o quadrado. Adicionamos ao primeiro membro o quadrado da metade do coeficiente de x , isto é, 25 , e ao segundo membro a mesma quantidade, isto é, 25 .

$$x^2 - 10x + 16 + 25 = 25$$

$$x^2 - 10x + 25 = 25 - 16$$

$$(x - 5)^2 = 9$$

$$x - 5 = \pm 3$$

$$x = 5 \pm 3$$

Portanto, as raízes da equação são $x = 8$ e $x = 2$.

III Problema. Achar o valor de x na equação $3x - 5 = 0$.

Solução:

Isolando o termo com x :

$$3x = 5$$

Para resolvermos uma equação completa do segundo grau, temos a seguinte regra:

Regra. Reduz-se a equação à forma $x^2 + 2px = q$; acha-se o quadrado da metade do coeficiente de x , isto é, p^2 , e junta-se a ambos os membros da equação.

Extrahe-se a raiz quadrada de ambos os membros, e obtêm-se as raízes da equação.

Exemplo: Resolver a equação $x^2 + 8x - 33 = 0$.

Solução:

$$x^2 + 8x - 33 = 0$$

$$x^2 + 8x = 33$$

$$x^2 + 8x + 16 = 33 + 16$$

$$(x + 4)^2 = 49$$

$$x + 4 = \pm 7$$

$$x = -4 \pm 7$$

Portanto, as raízes da equação são $x = 3$ e $x = -11$.

Verificação: Substitua as raízes encontradas na equação original para verificar se elas satisfazem a equação.

II Problema. Resolver a equação $x^2 - 10x + 16 = 0$.

Solução:

Para resolver a equação, vamos completar o quadrado. Adicionamos ao primeiro membro o quadrado da metade do coeficiente de x , isto é, 25 , e ao segundo membro a mesma quantidade, isto é, 25 .

$x^2 - 10x + 16 + 25 = 25$

$x^2 - 10x + 25 = 25 - 16$

$(x - 5)^2 = 9$

$x - 5 = \pm 3$

$x = 5 \pm 3$

Portanto, as raízes da equação são $x = 8$ e $x = 2$.

III Problema. Achar o valor de x na equação $3x - 5 = 0$.

Solução:

Isolando o termo com x :

$3x = 5$

II Problema. Dividir o numero 24 em duas partes, de sorte que o producto dessas partes seja 85

Solução.

Indicar os sinais

III Problema. Um fazendeiro comprou certo numero de carneiros por 800\$, se elle tivesse comprado o mesmo numero e mais 4 carneiros pelos mesmos 800\$, o preço de cada carneiro seria 1\$ menos. Quantos carneiros comprou?

Solução. Seja x o numero dos carneiros e y o preço que custou cada carneiro; e $\frac{800}{x}$ o preço que custaria se elle comprasse mais 4. A differença dos dois preços deve ser igual a \$100.

Em 1.ª. $800 - 100x = \frac{800}{x}$ o resultado que o valor de x é 16, numero de carneiros que o fazendeiro comprou

4. Qual o numero inteiro e positivo cujo quadrado addicionado com 6 vezes o numero dará 55. Resp. 5.

5. Qual um numero inteiro e positivo de cujo quadrado subtrahindo 6 vezes o mesmo numero, restará 7. Resp. 7

6. Achar o numero inteiro e positivo cujo dobro do quadrado mais 3 vezes o numero dá 63. Resp. 6

7. Achar dois numeros taes que a sua differença seja 6, e o seu producto seja 160. Resp. 10 e 16 ou -10 e -16

8. Achar dois numeros cuja somma seja 23, e cujo producto seja 132. Resp. 11 e 12

9. Dividir o numero 50 em duas partes, de sorte que o seu producto seja 544. Resp. 2

10. Dividir o numero 30 em duas partes, de sorte que o seu producto seja igual a oito vezes a sua differença. Resp. 6 e 24

11. Perguntando-se a um menino que estudava Algebra, qual era a sua idade, elle respondeu: Se do quadrado da minha idade subtrahirdes $\frac{1}{2}$ da minha idade, o resultado será 250 annos. Quantos annos tinha o mesmo? Resp. 16 annos.

12. Um professor dividiu 144 laranjas pelos seus discipulos; se houvesse mais dois alumnos, cada um delles teria recebido uma laranja de menos. Qual era o numero de discipulos? Resp. 16.

Fórmulas da equação completa do segundo grau

335. Já vimos que a equação completa do segundo grau

com $a \neq 0$ pode ser reduzida a uma das seguintes formas

1.ª forma: $x^2 + 2px + q = 0$

2.ª forma: $x^2 + 2px - q = 0$

3.ª forma: $x^2 - 2px + q = 0$

4.ª forma: $x^2 - 2px - q = 0$

Os exercícios apresentados têm as seguintes fórmulas

1.ª equação, $x^2 + 8x = 20$, Resp. $x = -4 \pm 2$

5.ª equação, $x^2 - 1 = 0$, Resp. $x = \pm 1$

9.ª equação, $x^2 - 8x = 0$, Resp. $x = 0$ ou $x = 8$

12.ª equação, $x^2 - 8x - 1 = 0$, Resp. $x = 4 \pm \sqrt{17}$

337. Nestes quatro exercícios vemos que uma equação completa do segundo grau não tem uma só fórmula, mas pôde

aparecer de quatro fórmulas diversas assim generalizadas:

1.ª equação $x^2 + 2px + q = 0$, 1.ª fórmula,

5.ª equação $x^2 + 2px - q = 0$, 2.ª fórmula,

9.ª equação $x^2 - 2px + q = 0$, 3.ª fórmula;

12.ª equação $x^2 - 2px - q = 0$, 4.ª fórmula

338. Os característicos que distinguem estas fórmulas são os seguintes: O termo x^2 é sempre positivo em todas as

fórmulas, mas os termos $2px$ e q são ambos positivos na 1.ª

fórmula; o primeiro é negativo e outro positivo na 2.ª fórmula;

o primeiro é positivo e outro negativo na 3.ª fórmula, e final

mente ambos são negativos na 4.ª fórmula

339. Daqui concluímos que toda equação completa do segundo grau pode ser reduzida à fórmula $x^2 + 2px + q = 0$, na

qual, os termos $2px$ e q podem ser ambas quantidades posi

tivas ou negativas, ou um ser positivo e o outro negativo

340. As fórmulas de uma equação completa podem tam

bem ser distinguidas pelo resultado da solução, isto é, pelas

suas raízes. Assim, a 1.ª fórmula tem a raiz positiva numeri

341. Vamos agora achar as raízes das diversas formas de uma equação completa do segundo grau.

Problema. Qual é o valor de x na equação $x^2+2px-q$?

Solução. Para resolvermos esta equação vamos decompô-la no 1.º grau do primeiro membro, isto é, a queramos de modo que o 1.º membro de x seja $332 = 333$ e o 2.º membro de x seja 325 ; e assim por diante.

$$\begin{aligned} \text{Primeira parte} & \dots + \dots & x^2 + 2px + p^2 \\ \text{Segunda parte} & \dots + \dots & - q - p^2 \end{aligned}$$

Nota. Para resolvermos esta equação vamos decompô-la no 1.º grau do primeiro membro, isto é, a queramos de modo que o 1.º membro de x seja $332 = 333$ e o 2.º membro de x seja 325 ; e assim por diante.

Se a equação for $x^2+2px-q$ e a raiz for negativa, a equação será $x^2+2px+q$ e a raiz será positiva. Se a equação for $x^2-2px-q$ e a raiz for positiva, a equação será $x^2-2px+q$ e a raiz será negativa.

342. Resolvendo a equação $x^2+2px-q$ as outras formas

as seguintes raízes

$$\begin{aligned} & x^2 + 2px - q = 0 \\ & x^2 + 2px + p^2 - q - p^2 = 0 \\ & (x+p)^2 - (q+p^2) = 0 \\ & (x+p)^2 = q+p^2 \\ & x+p = \pm \sqrt{q+p^2} \\ & x = -p \pm \sqrt{q+p^2} \end{aligned}$$

Achar as raízes de uma equação completa por meio da sua fórmula generalizada

I Problema. Quais são as raízes da equação $x^2+8x-207$?

Solução. Esta equação tem a primeira forma e a raiz da forma $x^2+2px-q$ (n.º 342). A raiz da equação é $x^2+8x-207$ e a raiz da equação é $x^2+8x+207$ e a raiz da equação é $x^2+8x-207$ e a raiz da equação é $x^2+8x+207$.

$$\begin{aligned} & x^2 + 8x - 207 = 0 \\ & x^2 + 8x + 16 - 223 = 0 \\ & (x+4)^2 - 223 = 0 \\ & (x+4)^2 = 223 \\ & x+4 = \pm \sqrt{223} \\ & x = -4 \pm \sqrt{223} \end{aligned}$$

II Problema. Quais são os valores de x na equação $10x=21$?

Solução. Esta equação tem a segunda forma e a raiz da forma $x^2+2px-q$ (n.º 342). A raiz da equação é $x^2+2px-q$ e a raiz da equação é $x^2+2px-q$ e a raiz da equação é $x^2+2px-q$.

As raízes das outras formas acham-se do mesmo modo. Os discípulos devem agora resolver por este processo todos os exercícios das páginas 159.

Exercícios. Resolva as equações completas do segundo grau.

343. Já vimos na seção 341 que a forma $x^2+2px-q$ tem as raízes que são

$$\begin{aligned} & x = -p + \sqrt{q+p^2} \\ & x = -p - \sqrt{q+p^2} \end{aligned}$$

Somando estas duas raízes, temos $-2p$, isto é, o coeficiente de x com o sinal trocado. Daqui estabelecemos a

1.ª Propriedade. Em uma equação do segundo grau, a soma das duas raízes é igual ao coeficiente do segundo termo com o sinal trocado.

344. Se multiplicarmos as duas raízes, o produto será p^2-q , tirando o parêntese, ficará p^2-q , isto é, o termo conhecido do segundo membro com o sinal contrário. Daqui pode-se estabelecer a

2.ª Propriedade. Em uma equação do segundo grau, o produto das duas raízes é igual ao termo conhecido do segundo membro com o sinal contrário.

345. Estas duas propriedades são de grande importância, porque se a soma das duas raízes dá o coeficiente de x , e o produto dá o segundo membro, podemos facilmente formar ou achar qualquer equação completa por meio somente das suas raízes.

Exemplo. As raízes de uma equação são -4 e 5 ; qual é a equação?

Solução. Para achar esta equação, vamos achar o coefficiente de x e o termo independente. O coefficiente de x é a soma das raízes com o signal contrario, ou seja, $+10$. O termo independente é o producto das raízes com o signal contrario, ou seja, -10 . Logo a equação é $x^2 + 10x - 10 = 0$.

Para se formar uma equação, sendo dadas as suas raízes, temos a seguinte regra:

Regra. A somma das raízes com o signal contrario dará o coefficiente de x .

O producto das raízes com o signal contrario dará o termo do membro seguinte.

Formar as seguintes equações:

1. Qual é a equação que tem as raízes $+9$ e -10 ?
Resp. $x^2 + x - 90 = 0$.
2. Formar uma equação, sendo dadas as raízes $+0$ e -10 .
Resp. $x^2 - 10x = 0$.
3. Se as raízes de uma equação são $+8$ e -2 , qual é a equação?
Resp. $x^2 - 6x - 16 = 0$.
4. Qual é a equação cujas raízes são $+3$ e -4 ?
Resp. $x^2 - x - 12 = 0$.

346. 3.ª Propriedade. Uma equação do segundo grau pode decompor-se em dois factores binómios, dos quaes o primeiro termo de cada um é x , e o segundo, um das raízes com o signal contrario.

Obtemos esta propriedade se tomarmos qualquer equação do segundo grau, por exemplo, a equação $x^2 + 10x - 10 = 0$. Esta equação consiste de um termo x^2 , de um termo $+10x$ e de um termo -10 . Se a equação for $x^2 + 10x - 10 = 0$, podemos achar as raízes -2 e $+12$ sem resolver a equação.

Se a equação for $x^2 + 10x - 10 = 0$, podemos achar as raízes -2 e $+12$ sem resolver a equação.

Se a equação for $x^2 + 10x - 10 = 0$, podemos achar as raízes -2 e $+12$ sem resolver a equação.

Para se decompor uma equação trinómia em dois factores binómios, temos a seguinte regra:

Regra. Achar-se dois números cuja somma algebraica seja igual ao coefficiente de x , e cujo producto seja igual ao terceiro termo do trinómio.

Depois a letra x somada a um dos números será um factor, e a letra x somada ao outro número será o outro factor.

Decompor as seguintes expressões:

1. Achar os factores de $x^2 - 6x - 8$.
Resp. $(x-2)(x+4)$.
2. Decompor a expressão $x^2 + 0x - 27$ em seus factores binómios.
Resp. $(x-3)(x+9)$.
3. Decompor a expressão $x^2 - 2x - 24$ em seus factores binómios.
Resp. $(x-6)(x+4)$.
4. Achar os factores da expressão $x^2 - x - 42$.
Resp. $(x-7)(x+6)$.

EQUAÇÕES DO SEGUNDO GRAU CONTENDO DUAS QUANTIDADES DESCONHECIDAS

347. Para resolver uma equação do segundo grau contendo duas quantidades desconhecidas, temos de eliminar uma dellas, assim de obtermos uma equação simples, com uma só quantidade desconhecida.

I Problema. Achar os valores de x e y nas equações $x + y = 10$

Solução. O valor de x e y na equação $x + y = 10$ é $x = 10 - y$. Substituindo agora em (2.ª) equação a quantidade x pelo seu valor temos a seguinte equação: $y^2 + 4y + 4 = 100$. $2y^2 + 4y + 4 = 100$. $y^2 + 2y + 1 = 49$. $y + 1 = 7$. $y = 6$ ou $y = -8$. $x = 4$ ou $x = 18$.

II Problema. Qual é o valor de x e y nas equações $x + y = 8$ e $xy = 15$?

Solução. O valor de x na (1.ª) equação é $x = 8 - y$. Substituindo agora em (2.ª) equação a letra x pelo seu valor $8 - y$, temos a seguinte equação: $(8 - y)y = 15$. $8y - y^2 = 15$. $y^2 - 8y + 15 = 0$. $y = 3$ ou $y = 5$. $x = 5$ ou $x = 3$.

111. Problema. Qual é o valor de x e y se $x + y = 164$, e $xy = 80$?

Solução. Sejam x e y os números dados. Então, temos:

1. $x + y = 164$ (1)

2. $xy = 80$ (2)

3. $x^2 + y^2 = 164^2 - 2xy = 26896 - 160 = 26736$

4. $x^2 - y^2 = 164^2 - 4xy = 26896 - 320 = 26576$

5. $x^2 + y^2 = 26736$ (3)

6. $x^2 - y^2 = 26576$ (4)

7. $x^2 + y^2 = 26736$ (5)

8. $x^2 - y^2 = 26576$ (6)

9. $x^2 + y^2 = 26736$ (7)

10. $x^2 - y^2 = 26576$ (8)

11. $x^2 + y^2 = 26736$ (9)

12. $x^2 - y^2 = 26576$ (10)

13. $x^2 + y^2 = 26736$ (11)

14. $x^2 - y^2 = 26576$ (12)

15. $x^2 + y^2 = 26736$ (13)

16. $x^2 - y^2 = 26576$ (14)

17. $x^2 + y^2 = 26736$ (15)

18. $x^2 - y^2 = 26576$ (16)

19. $x^2 + y^2 = 26736$ (17)

20. $x^2 - y^2 = 26576$ (18)

21. $x^2 + y^2 = 26736$ (19)

22. $x^2 - y^2 = 26576$ (20)

23. $x^2 + y^2 = 26736$ (21)

24. $x^2 - y^2 = 26576$ (22)

25. $x^2 + y^2 = 26736$ (23)

26. $x^2 - y^2 = 26576$ (24)

27. $x^2 + y^2 = 26736$ (25)

28. $x^2 - y^2 = 26576$ (26)

29. $x^2 + y^2 = 26736$ (27)

30. $x^2 - y^2 = 26576$ (28)

31. $x^2 + y^2 = 26736$ (29)

32. $x^2 - y^2 = 26576$ (30)

33. $x^2 + y^2 = 26736$ (31)

34. $x^2 - y^2 = 26576$ (32)

35. $x^2 + y^2 = 26736$ (33)

36. $x^2 - y^2 = 26576$ (34)

37. $x^2 + y^2 = 26736$ (35)

38. $x^2 - y^2 = 26576$ (36)

39. $x^2 + y^2 = 26736$ (37)

40. $x^2 - y^2 = 26576$ (38)

41. $x^2 + y^2 = 26736$ (39)

42. $x^2 - y^2 = 26576$ (40)

43. $x^2 + y^2 = 26736$ (41)

44. $x^2 - y^2 = 26576$ (42)

45. $x^2 + y^2 = 26736$ (43)

46. $x^2 - y^2 = 26576$ (44)

47. $x^2 + y^2 = 26736$ (45)

48. $x^2 - y^2 = 26576$ (46)

49. $x^2 + y^2 = 26736$ (47)

50. $x^2 - y^2 = 26576$ (48)

51. $x^2 + y^2 = 26736$ (49)

52. $x^2 - y^2 = 26576$ (50)

53. $x^2 + y^2 = 26736$ (51)

54. $x^2 - y^2 = 26576$ (52)

55. $x^2 + y^2 = 26736$ (53)

56. $x^2 - y^2 = 26576$ (54)

57. $x^2 + y^2 = 26736$ (55)

58. $x^2 - y^2 = 26576$ (56)

59. $x^2 + y^2 = 26736$ (57)

60. $x^2 - y^2 = 26576$ (58)

61. $x^2 + y^2 = 26736$ (59)

62. $x^2 - y^2 = 26576$ (60)

63. $x^2 + y^2 = 26736$ (61)

64. $x^2 - y^2 = 26576$ (62)

65. $x^2 + y^2 = 26736$ (63)

66. $x^2 - y^2 = 26576$ (64)

67. $x^2 + y^2 = 26736$ (65)

68. $x^2 - y^2 = 26576$ (66)

69. $x^2 + y^2 = 26736$ (67)

70. $x^2 - y^2 = 26576$ (68)

71. $x^2 + y^2 = 26736$ (69)

72. $x^2 - y^2 = 26576$ (70)

73. $x^2 + y^2 = 26736$ (71)

74. $x^2 - y^2 = 26576$ (72)

75. $x^2 + y^2 = 26736$ (73)

76. $x^2 - y^2 = 26576$ (74)

77. $x^2 + y^2 = 26736$ (75)

78. $x^2 - y^2 = 26576$ (76)

79. $x^2 + y^2 = 26736$ (77)

80. $x^2 - y^2 = 26576$ (78)

81. $x^2 + y^2 = 26736$ (79)

82. $x^2 - y^2 = 26576$ (80)

83. $x^2 + y^2 = 26736$ (81)

84. $x^2 - y^2 = 26576$ (82)

85. $x^2 + y^2 = 26736$ (83)

86. $x^2 - y^2 = 26576$ (84)

87. $x^2 + y^2 = 26736$ (85)

88. $x^2 - y^2 = 26576$ (86)

89. $x^2 + y^2 = 26736$ (87)

90. $x^2 - y^2 = 26576$ (88)

91. $x^2 + y^2 = 26736$ (89)

92. $x^2 - y^2 = 26576$ (90)

93. $x^2 + y^2 = 26736$ (91)

94. $x^2 - y^2 = 26576$ (92)

95. $x^2 + y^2 = 26736$ (93)

96. $x^2 - y^2 = 26576$ (94)

97. $x^2 + y^2 = 26736$ (95)

98. $x^2 - y^2 = 26576$ (96)

99. $x^2 + y^2 = 26736$ (97)

100. $x^2 - y^2 = 26576$ (98)

101. $x^2 + y^2 = 26736$ (99)

102. $x^2 - y^2 = 26576$ (100)

103. $x^2 + y^2 = 26736$ (101)

104. $x^2 - y^2 = 26576$ (102)

105. $x^2 + y^2 = 26736$ (103)

106. $x^2 - y^2 = 26576$ (104)

107. $x^2 + y^2 = 26736$ (105)

108. $x^2 - y^2 = 26576$ (106)

109. $x^2 + y^2 = 26736$ (107)

110. $x^2 - y^2 = 26576$ (108)

111. $x^2 + y^2 = 26736$ (109)

112. $x^2 - y^2 = 26576$ (110)

113. $x^2 + y^2 = 26736$ (111)

114. $x^2 - y^2 = 26576$ (112)

115. $x^2 + y^2 = 26736$ (113)

116. $x^2 - y^2 = 26576$ (114)

117. $x^2 + y^2 = 26736$ (115)

118. $x^2 - y^2 = 26576$ (116)

119. $x^2 + y^2 = 26736$ (117)

120. $x^2 - y^2 = 26576$ (118)

121. $x^2 + y^2 = 26736$ (119)

122. $x^2 - y^2 = 26576$ (120)

123. $x^2 + y^2 = 26736$ (121)

124. $x^2 - y^2 = 26576$ (122)

125. $x^2 + y^2 = 26736$ (123)

126. $x^2 - y^2 = 26576$ (124)

127. $x^2 + y^2 = 26736$ (125)

128. $x^2 - y^2 = 26576$ (126)

129. $x^2 + y^2 = 26736$ (127)

130. $x^2 - y^2 = 26576$ (128)

131. $x^2 + y^2 = 26736$ (129)

132. $x^2 - y^2 = 26576$ (130)

133. $x^2 + y^2 = 26736$ (131)

134. $x^2 - y^2 = 26576$ (132)

135. $x^2 + y^2 = 26736$ (133)

136. $x^2 - y^2 = 26576$ (134)

137. $x^2 + y^2 = 26736$ (135)

138. $x^2 - y^2 = 26576$ (136)

139. $x^2 + y^2 = 26736$ (137)

140. $x^2 - y^2 = 26576$ (138)

141. $x^2 + y^2 = 26736$ (139)

142. $x^2 - y^2 = 26576$ (140)

143. $x^2 + y^2 = 26736$ (141)

144. $x^2 - y^2 = 26576$ (142)

145. $x^2 + y^2 = 26736$ (143)

146. $x^2 - y^2 = 26576$ (144)

147. $x^2 + y^2 = 26736$ (145)

148. $x^2 - y^2 = 26576$ (146)

149. $x^2 + y^2 = 26736$ (147)

150. $x^2 - y^2 = 26576$ (148)

151. $x^2 + y^2 = 26736$ (149)

152. $x^2 - y^2 = 26576$ (150)

153. $x^2 + y^2 = 26736$ (151)

154. $x^2 - y^2 = 26576$ (152)

155. $x^2 + y^2 = 26736$ (153)

156. $x^2 - y^2 = 26576$ (154)

157. $x^2 + y^2 = 26736$ (155)

158. $x^2 - y^2 = 26576$ (156)

159. $x^2 + y^2 = 26736$ (157)

160. $x^2 - y^2 = 26576$ (158)

161. $x^2 + y^2 = 26736$ (159)

162. $x^2 - y^2 = 26576$ (160)

163. $x^2 + y^2 = 26736$ (161)

164. $x^2 - y^2 = 26576$ (162)

165. $x^2 + y^2 = 26736$ (163)

166. $x^2 - y^2 = 26576$ (164)

167. $x^2 + y^2 = 26736$ (165)

168. $x^2 - y^2 = 26576$ (166)

169. $x^2 + y^2 = 26736$ (167)

170. $x^2 - y^2 = 26576$ (168)

171. $x^2 + y^2 = 26736$ (169)

172. $x^2 - y^2 = 26576$ (170)

173. $x^2 + y^2 = 26736$ (171)

174. $x^2 - y^2 = 26576$ (172)

175. $x^2 + y^2 = 26736$ (173)

176. $x^2 - y^2 = 26576$ (174)

177. $x^2 + y^2 = 26736$ (175)

178. $x^2 - y^2 = 26576$ (176)

179. $x^2 + y^2 = 26736$ (177)

180. $x^2 - y^2 = 26576$ (178)

181. $x^2 + y^2 = 26736$ (179)

182. $x^2 - y^2 = 26576$ (180)

183. $x^2 + y^2 = 26736$ (181)

184. $x^2 - y^2 = 26576$ (182)

185. $x^2 + y^2 = 26736$ (183)

186. $x^2 - y^2 = 26576$ (184)

187. $x^2 + y^2 = 26736$ (185)

188. $x^2 - y^2 = 26576$ (186)

189. $x^2 + y^2 = 26736$ (187)

190. $x^2 - y^2 = 26576$ (188)

191. $x^2 + y^2 = 26736$ (189)

192. $x^2 - y^2 = 26576$ (190)

193. $x^2 + y^2 = 26736$ (191)

194. $x^2 - y^2 = 26576$ (192)

Se em cada uma de xy tem duas vezes os valores x e y e o x e y de cada um desses poderemos tirar dois valores Com efeito: Se $x=1$

$$x^2 + y^2 = 10$$

representa, pois, quatro soluções a saber: $(1, 3)$, $(-1, 3)$, $(1, -3)$, $(-1, -3)$. Não é necessário dizer que cada um dos dois últimos Damos agora a fórmula da forma $x^2 + y^2 = a^2$ chamadas *exercício* de cada uma de xy .

349

$$x^2 + y^2 = 10$$

Problema. Achar o valor positivo de x na equação $x^2 - 7x + 8 = 0$.

Solução. Se x e y e y^2 to
recorrendo vemos $y = 3$
na equação

Regra. Para se resolver uma equação biquadrada, substitua-se depois como uma equação do segundo grau, e na raiz considera-se $y = x$.

Como vem as seguintes equações

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0$$

RAZÃO E PROPORÇÃO

350 Razão $a:b$ é a divisão de a por b . Se a e b são duas quantidades homogêneas, a razão $a:b$ é a divisão de a por b .

De dois modos podemos comparar duas quantidades homogêneas:

O primeiro modo é achar quanto a quantidade maior excede a menor.

O segundo modo é achar quantas vezes a quantidade menor está contida na maior.

Este modo é o primeiro modo de achar a razão. Se a e b são duas quantidades homogêneas, a razão $a:b$ é a divisão de a por b .

Se a e b são duas quantidades homogêneas, a razão $a:b$ é a divisão de a por b .

351

Se a e b são duas quantidades homogêneas, a razão $a:b$ é a divisão de a por b .

A razão entre duas quantidades homogêneas, temos de dividir o antecedente pelo conseqüente. Assim a razão de 6 para 3 é 2, isto é, 6 contém 2 vezes o número 3. A razão de 12 para 4 é 3, isto é, 12 contém 3 vezes o número 4.

352

Se a e b são duas quantidades homogêneas, a razão $a:b$ é a divisão de a por b .

353. Uma razão é uma simples divisão, na qual o antecedente é o dividendo, o conseqüente é o divisor, e a razão é o quociente. Se a e b são duas quantidades homogêneas, a razão $a:b$ é a divisão de a por b .

354. A razão entre duas quantidades pode ser um número inteiro, misto ou fraccionário, como succede com um quociente.

1. Problema. Achar a razão de 12 para 4.

Solução. $12:4 = 3$

2. Problema. Achar a razão de 12 para 4.

Solução. $12:4 = 3$

Regra 1. *homogeneas divide-se o antecedente pelo consequente, e o quociente será a razão.*

Exemplos para se fazer

- | | |
|---|-------|
| 1. Qual é a razão de $6x^2$ para $2x$? | Resp. |
| 2. Qual é a razão de $15x$ para $3x$? | " |
| 3. Qual é a razão de $20x$ para $5x$? | " |
| 4. Qual é a razão de $2a^2$ para $4a$? | " |
| 5. Qual é a razão de 288 para 132 ? | " |
| 6. Qual é a razão de $18abc$ para $6ab$? | " |
| 7. Qual é a razão de $x^2 - y^2$ para $x - y$? | " |
| 8. Qual é a razão de $21ab^2cd$ para $9a^2$? | " |

355. Uma razão composta é o producto de duas ou mais razões.

Assim $\frac{8}{12} \cdot \frac{4}{3} = 8$ é uma razão composta das razões $8/12$ e $4/3$.

Problema. Qual é a razão de 3 e de $12/3$?

Solução.

pela 354 $\frac{3}{12} \cdot \frac{4}{3} = 8$

Regra. Para se avaliar uma razão composta, multiplique o numerador das razões antecedentes e depois acha-se a razão dos dois productos.

- | | | |
|--|-------|---|
| 1. Qual é a razão composta de $8/12$ e de $25/30$? | Resp. | ? |
| 2. Qual é a razão composta de a/b e de $2b/3ac$? | Resp. | ? |
| 3. Qual é a razão composta de ab/b e de bc/bd ? | Resp. | ? |
| 4. Reduzir a razão de $99/77$ aos seus menores termos. | Resp. | ? |

Proporções

356. Uma proporção é uma igualdade entre duas razões. Assim $a:b::c:d$ é uma proporção, porque o quociente de a dividido por b é igual ao quociente de c dividido por d .

O signal da igualdade entre duas razões é quatro pontos ::, como a b:c:d, que se lê: a está para b, assim como c está para d.

357. Da definição apresentada conclue-se que, se quatro quantidades estiverem em proporção, a primeira dividida pela segunda será igual á terceira dividida pela quarta, de sorte que a proporção $a:b::c:d$ póde ser transformada na equação

Nota. Se na proporção $a:b::c:d$ se troca a primeira e a quarta e a segunda e a terceira, assim diz-se que duas quantidades em proporção de a para b são de c para d e vice-versa. Assim, se a proporção de a para b é de c para d , a proporção de c para a é de d para b .

358. As quatro quantidades que formam uma proporção, chamam-se termos da proporção, e tem a seguinte ordem:

1.º termo 2.º termo 3.º termo 4.º termo
 a b c d

O primeiro termo e o quarto chamam-se extremos; e o segundo e terceiro chamam-se meios.

O primeiro termo e o terceiro tem também o nome de antecedentes; e o segundo e o quarto tem o nome de consequentes.

Na proporção acima a e d são extremos; b e c são meios; a e c são antecedentes, e b e d são consequentes.

359. Tres quantidades estão também em proporção, quando a primeira está na mesma razão para a segunda, assim como a segunda está para a terceira. Os números 3 , 6 e 12 estão em proporção, porque a razão que ha entre 3 e 6 , ha também entre 6 e 12 .

O termo do meio chama-se meio ou média proporcional entre os outros dois. Assim, na proporção $a:b::b:c$, o termo b chama-se meio proporcional entre a e c , e o termo c chama-se terceira proporcional a a e b , e a proporção chama-se contínua.

Propriedades principaes das proporções

360. 1.ª Propriedade. Em toda proporção o producto dos meios é igual ao producto dos extremos

Demonstração. Na proporção $a:b$ e $c:d$ o produto do primeiro termo a e d dá pelo segundo, b , e c dá pelo quarto, d , logo ad é igual ao produto do primeiro e quarto.

$$\begin{array}{ccc} a & : & b \\ c & : & d \end{array} \quad (1^a)$$

$$\begin{array}{ccc} ad & = & bc \end{array} \quad (2^a)$$

Logo, se a, b, c, d são as equações que representam o produto dos meios igual ao produto dos extremos.

Logo, se a, b, c, d são as equações que representam o produto dos meios igual ao produto dos extremos.

$$\begin{array}{ccc} 3 \times 10 & = & 4 \times 5 \\ 30 & = & 20 \end{array}$$

361. Desde que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, segue-se o seguinte corolário.

Qualquer extremo é igual ao produto dos meios dividido pelo outro extremo. Qualquer meio é igual ao produto dos extremos dividido pelo outro meio.

Dados pois tres termos de uma proporção, podemos facilmente achar o outro termo. Assim, na proporção $a:b$ e $c:d$,

Resolver os seguintes problemas

1. Os primeiros tres termos de uma proporção são 12, 5 e 24, qual é o quarto termo? Resp. $\frac{b}{a} \cdot d$
2. Os tres primeiros termos de uma proporção são $12ab$, $4a^2b$ e $8ab^2$, qual é o quarto termo? Resp. $12a^2b^2$
3. Os tres ultimos termos de uma proporção são $4ab^2$, $8a^2b^2$ e $2a^2b$, qual é o primeiro termo? Resp. $\frac{b}{a} \cdot d$
4. Calcular o valor de x na proporção $a:b$ e $c:d$.
4. Qual o valor de c na proporção $a:b$ e $c:d$.
6. Os tres primeiros termos de uma proporção são ab^2 , $2a^2$ e $3ac$; qual é o quarto termo? Resp. $\frac{b}{a} \cdot d$

362. 2.ª Propriedade. Se o produto de duas quantidades for igual ao produto de outras duas, e se os factores de uma das quantidades forem os mesmos que os factores de outra, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

Demonstração. Sejam as duas equações $a:b$ e $c:d$. Logo, tendo a b e d dos productos por b e d temos a (1^a) equação. Como temos os factores a e b que são communs, temos a (2^a) equação que se transfere para a proporção $a:b$ e $c:d$. Se tomarmos duas proporções numericas e iguais, e multiplicarmos as duas ordens de a e b e c e d como antes e as de a e b como extremos, teremos ali a proporção, como vemos no ad .

$$\begin{array}{ccc} ad & = & bc \\ \frac{ad}{b} & = & \frac{bc}{b} \\ \frac{ad}{b} & = & c \end{array} \quad (1^a)$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{a}{b} & = & \frac{c}{d} \\ \frac{a}{b} \cdot d & = & \frac{c}{d} \cdot d \\ \frac{ad}{b} & = & c \end{array} \quad (2^a)$$

Logo, se a, b, c, d são as equações que representam o produto dos meios igual ao produto dos extremos.

1. $2 \times 18 = 12 \times 3$,
2. $1 \times 25 = 5 \times 20$
3. $200 = 100$,
4. $20 = 10$,
5. $20 = 10$

1	2	3	4	5
2	1	2	3	4
200	100	20	10	20
20	10	20	10	20
20	10	20	10	20

363. 3.ª Propriedade. Se a proporção $a:b$ e $c:d$ for a proporção dos extremos é igual ao quadrado do meio.

Demonstração. Na primeira propriedade vimos que o produto dos meios é igual ao produto dos extremos. Então na proporção $a:b$ e $c:d$, temos $ad = bc$.

Logo, como vimos que a média proporcional entre duas quantidades é igual a raíz quadrada do producto delle.

Problema. Qual é a media proporcional entre 4 e 9?

Solução. O producto das duas quantidades é 36. Se x é a raíz quadrada de 36 é 6. O meio é pois 6, e a proporção é 4 e 9.

1. Qual é a media proporcional entre 9 e 16? Resp. 12
2. Qual é a media proporcional entre 16 e 25? Resp. 20
3. Qual é a media proporcional entre 25 e 36? Resp. 30

364. 4.ª Propriedade. Se quatro quantidades formarem proporção, a primeira estará para a terceira, assim como a segunda para a quarta.

Demonstração.

Logo, se a, b, c, d são as equações que representam o produto dos meios igual ao produto dos extremos.

365. 5.ª Propriedade. Se quatro quantidades formarem proporção, a segunda estará para a primeira, assim como a

Progressão arithmetica

372. A progressão arithmetica $1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99$

373. Se os termos vão crescendo do primeiro para o ultimo, chama-se crescente. Se os termos vão decrescendo do primeiro para o ultimo, chama-se decrescente.

Em uma serie crescente, sendo a o primeiro termo com

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, a+5d, \text{ etc.}$$

374. Os termos a e $a+(n-1)d$ são os extremos, e d a diferença que ha entre dois termos consecutivos, chama-se diferença commum. Exemplo: 5, 9, 13, 17, 21, 25.

375. Dado o primeiro termo a e a diferença commum d , achar o termo n° .

376. Dado o primeiro termo a e a diferença commum d , achar a soma dos termos 1° a n° .

377. A diferença commum d e a soma de todos os termos S_n .

378. Conhecendo somente tres, podemos facilmente achar as outras.

Conhecendo o primeiro termo a , a diferença commum d e o numero de termos n , achar o ultimo termo u .

379. Dando-se o primeiro termo a , a diferença commum d e o ultimo termo u , achar o numero de termos n .

380. Dado

$$a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \text{ etc.}$$

Nesta serie vemos que, em cada termo o coefficiente de d é 1 menos

o coefficiente do termo é 2, etc.

no terceiro termo é 3, no quarto é 4, etc.

Formula

Regra. O ultimo termo é $u = a + (n-1)d$

de termos menos 1.

Se a serie for decrescente, multiplique d por -1 .

Exemplo: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99

Resp. $u = 3 + 2(4-1) = 9$

3. Num serie crescente, sendo 1 o primeiro termo, e 9

Resp. 77.

4. Qual é o decimo quinto termo da serie 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99

Resp. 29.

5. Qual é a soma dos termos da serie 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99

Resp. 495.

Acha a somma de todos os termos

377. Dando-se o primeiro termo a e a diferença commum d , achar a soma dos termos 1° a n° .

378. Conhecendo o primeiro termo a e a diferença commum d , achar a soma dos termos 1° a n° .

Solução. A soma da serie é a soma dos termos $a, a+d, a+2d, a+3d, a+4d, \text{ etc.}$

$$S_n = a + (a+d) + (a+2d) + (a+3d) + (a+4d) + \text{ etc.}$$

ou $2a + (n-1)d$ tomando tantas vezes quantos são os termos da

Formula $S_n = \frac{n}{2}(a+u)$

Esta formula traduzida em log. é $\log S_n = \log \frac{n}{2} + \log(a+u)$

A. B.

I.

Regra. A somma de todos os termos é igual à metade da somma do primeiro e do ultimo multiplicada pelo numero de termos.

1. Achar a somma de todos os termos da série 1, 2, 3, 4, 5, etc. até 25.

Solução. $\text{Summa} = \left(\frac{1+25}{2} \right) \times 25 = 325.$

2. Sendo o primeiro termo de uma série 2, o ultimo termo 50, e o numero de termos 17, qual é a somma de todos os termos? **Resp.** 442.

3. O primeiro termo é 10, o ultimo é 20, e o numero de termos é 6; qual é a somma da série? **Resp.** 90.

4. O primeiro termo é $\frac{1}{2}$ o ultimo termo é 30, e o numero de termos é 50; qual é a somma da série inteira? **Resp.** ?

5. Dar a somma da série 3, 5, 8, 11, até o termo 20. **Resp.** ?

378. As duas fórmulas que acabamos de expôr, chamam-se fundamentais, porque nos offerecem duas equações que resolvem este problema geral:

«Conhecidas tres das cinco quantidades a , d , n , u , e s , que entram em uma progressão arithmetica, determinar as outras duas.»

(1.ª Equação fundamental)

(2.ª Equação fundamental)

$$u = a + d(n-1)$$

$$s = \left(\frac{a+u}{2} \right) n$$

Para acharmos o valor de a , que é o primeiro termo da série, quando são conhecidos o ultimo termo, o numero de termos e differença common, transporemos na 1.ª equação a letra a para o primeiro membro, e a letra u para o segundo, como se vê na equação ao lado.

$$a = u - d(n-1)$$

379. Para acharmos o valor de d , que é a differença common, conhecendo u , n e a transporemos na 1.ª equação a letra d para o primeiro membro e a letra u para o segundo, como se vê na fórmula ao lado.

$$d(n-1) = u - a$$

$$d = \frac{u-a}{n-1}$$

380. Para acharmos o valor de n , que é o numero dos termos, conhecendo s , a e u , faremos na 2.ª equação a transposição que vemos ao lado. (Vede n.º 178).

$$2s = n(a+u)$$

$$n(a+u) = 2s$$

$$n = \frac{2s}{a+u}$$

Desse modo podemos achar facilmente qualquer das cinco quantidades de uma progressão, sendo tres dellas conhecidas.

Inserir qualquer numero de meios arithmeticos entre dois termos dados

381. Conforme vimos na secção antecedente, a fórmula para acharmos a differença common dos termos é a que está ao lado, e que quer dizer: Em qualquer progressão arithmetica a differença common é igual á differença dos extremos dividida pelo numero de termos menos 1.

$$d = \frac{u-a}{n-1}$$

Se quizermos, por exemplo, inserir cinco meios entre 3 e 15, temos de achar primeiro a differença common dessa série. Ora os extremos são 3 e 15; o numero de termos inseridos com os dois extremos são $5+2=7$, então a differença common é 2, como vemos na operação ao lado; e a série é

$$\frac{15-3}{7-1} = 2$$

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15.

382. É evidente que, se inserirmos o mesmo numero de meios entre termos consecutivos de uma progressão arithmetica, o resultado formará uma nova progressão. Assim, se inserirmos tres termos entre os termos consecutivos da progressão 1, 3, 17, etc., a nova série será 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, e assim por diante.

Resolver as seguintes problemas:

1. Inserir tres termos entre 5 e 7.

Solução. $\frac{7-5}{5-1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Sendo a razão $\frac{1}{2}$ a série é 5, $5\frac{1}{2}$, 6, $6\frac{1}{2}$, 7.

2. Inserir 5 meios arithmeticos entre 14 e 10.

Resp. 14 $\frac{1}{2}$, 14 $\frac{3}{4}$, 15, 15 $\frac{1}{4}$, 15 $\frac{3}{2}$.

3. Achar 9 meios arithmeticos entre 2 e 32.

Resp. 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29.

4. Achar 6 meios arithmeticos entre 1 e 50.

Resp. ?

5. O primeiro termo de uma progressão crescente é 5; o ultimo termo é 50, e a somma de todos os termos é 275; qual é o numero de termos? **Resp.** 10.

6. O primeiro termo de uma progressão crescente é 4; o ultimo termo é 32, e o numero de termos é 8; qual é a differença common? **Resp.** 4.

7. O ultimo termo de uma progressão crescente é 50; a differença common é 5, e o numero de termos é 10; qual é o primeiro termo? **Resp.** 5.

8. Cem pedras estando collocadas em linha recta com a distancia de 2 metros uma da outra, quanto teria de andar a

pessoa que tivesse de recolher todas as pedras uma a uma, em um cesto posto a 2 metros de distancia da primeira pedra?

Resp. 20200^m.

Nota. A pessoa que recolher as pedras tem de andar 2 vezes a distancia entre o cesto e a pedra; uma quando vai buscar a pedra, e a outra quando a traz, e por isso a differença commun é 2 vezes 2 metros = 4 metros, e por isso o primeiro termo é 4 metros.

9. Um estudante comprou 7 objectos, cujos preços formavam uma progressão arithmetica. O preço do objecto mais barato foi \$500, e o preço do mais caro foi 2\$300. Achar os preços dos outros objectos.

Resp. \$800, 1\$100, 1\$400, 1\$700 e 2\$000.

10. Se o primeiro termo de uma progressão crescente é h , a differença commun é 3, e o numero de termos é 15, qual é o ultimo termo?

Resp. 7.

11. Em uma série crescente, 11 é o primeiro termo, 6 é a differença commun; qual é pois o vigésimo termo da progressão?

Resp. 125.

12. Achar a somma da série 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc., até 1000 termos.

Resp. 500500.

Progressão geometrica

383. Progressão geometrica é uma série de numeros, cada um dos quaes é um certo numero de vezes maior ou menor do que o seu antecedente.

Série crescente: 1, 3, 9, 27, 81, 243, etc.

Série decrescente: 96, 48, 24, 12, 6, 3, etc.

384. O numero de vezes que cada termo da progressão geometrica vai crescendo ou diminuindo chama-se **razão commun**.

A razão commun pôde ser inteira ou fraccionaria. Quando a razão é uma fracção, a série é decrescente, porque a multiplicação de uma quantidade positiva, qualquer que ella seja, por uma fracção dá sempre um producto inferior ao multiplicando. Assim na série crescente acima, a razão commun é 3, e na decrescente é $\frac{1}{3}$.

385. Em cada progressão geometrica, cada termo é formado pelo seu antecedente multiplicado pela razão.

386. Em uma série geometrica, temos de considerar cinco quantidades que são:

- | | |
|---------------------------------------|---|
| 1. ^a O primeiro termo, a | 4. ^a O numero de termos, n |
| 2. ^a O ultimo termo, u | 5. ^a A somma de todos os termos, s |
| 3. ^a A razão commun, r | |

Ha tal relação entre estas 5 quantidades que, conhecidas 3 dellas, podemos facilmente achar as outras duas.

Achar qualquer termo de uma progressão geometrica

387. Dando-se o primeiro termo representado por a , o numero de termos representado por n , e a razão commun representada por r , achar o ultimo termo representado por u .

Solução. Sendo a o primeiro termo, e cada termo da progressão formado do seu antecedente multiplicado pela razão, segue-se que a série deve ser

$$a, ar, ar^2, ar^3, ar^4, \dots, ar^{n-1}$$

Examinando o expoente de r , vemos que na primeira termo é 1, no terceiro é 3, no quinto é 5, isto é, 1 menos que o numero da ordem do termo, de sorte que no ultimo termo, o expoente do r deve ser 1 menos que o numero de termos, isto é, ar^{n-1} . Daqui temos a

$$\text{Fórmula: } u = ar^{n-1}$$

Esta fórmula traduzida em linguagem commun dá a seguinte regra:

Regra. O ultimo termo de uma progressão geometrica é igual ao producto do primeiro termo multiplicado pela potencia da razão cujo expoente seja 1 menos do que o numero de termos.

1. Achar o sexto termo de uma progressão geometrica, em que o primeiro termo é 3, e a razão commun é 2.

$$\text{Solução. } u = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96.$$

2. O primeiro termo de uma progressão geometrica é 4, e a razão commun é 3; qual é o sétimo termo?

Resp. 2816.

3. O primeiro termo é 5, a razão commun é 4; qual é o termo oitavo?

Resp. 81920.

4. O primeiro termo é 7, a razão commun é 2; qual é o termo decimo?

Resp. 3584.

5. Se um negociante, começando com 5 contos, dobrasse o seu capital cada cinco annos, quanto teria elle no fim de vinte annos?

Resp. 80 contos.

Achar a somma de todos os termos de uma progressão geometrica

388. Dando-se o primeiro termo a , a razão commun r , e o numero de termos n , achar a somma dos termos s .

Solução analytica. Se multiplicarmos qualquer série geometrica pela sua razão (r), o resultado será uma nova série na qual cada termo, excepto o ultimo terá um termo correspondente na primeira série. Observemos estas duas séries

$$\begin{array}{l} \text{Série } s = a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} \\ \text{Série } r = ar + ar^2 + ar^3 + ar^4 + \dots + ar^n \end{array}$$

Notamos aqui que os termos das duas séries são identicos, excepto o primeiro termo da primeira serie, e o ultimo termo da segunda. Se agora subtrahirmos a primeira serie da outra que foi multiplicada por r , todos os termos se vão desapparecendo, restando somente os dois extremos, isto é, $ar^n - a$; então temos

$$\begin{aligned} ar^n - a &= r(ar^{n-1} - a) \\ ar^n - a &= ar^n - ar \\ ar^n - a &= ar^n - ar \end{aligned}$$

Já vimos (n. 397) que multiplicando ambos os termos desta igualdade por n , temos sempre. Substituindo no valor de r a quantidade ar por ar^n , temos a

$$\text{Fórmula: } s = \frac{ar^n - a}{r - 1}$$

Esta fórmula, traduzida em linguagem commum, dá a seguinte regra:

Regra. Para se achar a somma dos termos de uma progressão geometrica, multiplica-se o ultimo termo pela razão, do producto subtrahese o primeiro termo, e o resto divide-se pela razão menos 1.

1. Achar a somma de uma progressão geometrica cujo primeiro termo é 4, a razão é 3, e o ultimo termo 2916.

$$\text{Solução. } \frac{(2916 \times 3) - 4}{3 - 1} = 4372.$$

2. Achar a somma de uma progressão geometrica, na qual o primeiro termo é 7, a razão é 2, e o ultimo termo é 3584. Resp. 7161.

3. Sendo o primeiro termo de uma progressão geometrica 5, a razão 4, e o ultimo termo 81920, qual é a somma dos termos dessa progressão? Resp. 109225.

4. Achar a somma de 7 termos da progressão 1, 2, 4, 8, etc. Resp. 127.

5. Achar a somma de 10 termos da progressão 4, 12, 36, etc. 118096.

6. Achar a somma de 9 termos da progressão 5, 20, 80, etc. Resp. 436805.

Achar a média geometrica entre dois números

398. Para acharmos média geometrica entre dois números, examinemos a progressão de tres quantidades.

$$a, ar, ar^2$$

Multiplicando os dois extremos, vemos que o producto é $a \times ar^2 = a^2 r^2$, e que o quadrado do meio é $(ar)^2 = a^2 r^2$, isto é, o producto dos extremos é igual ao quadrado do meio.

Daqui temos a seguinte regra:

Regra. Para se achar a média geometrica entre dois números multiplica-se esses números, e extrahese a raíz quadrada do producto.

1. Achar a média geometrica entre 4 e 9.

$$\text{Solução. } \sqrt{4 \times 9} = 6$$

2. Achar a média geometrica entre 4 e 25. Resp. 10.

3. Achar a média geometrica entre 9 e 16. Resp. 12.

4. Achar a média geometrica entre $4a$ e $9a$. Resp. $6a$.

5. Achar a média geometrica entre $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{8}$. Resp. $\frac{1}{4}$.

Problemas variados para o exame

1. Reduzir $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 2x + 4}$ á sua expressão mais simples.

$$\text{Resp. } \frac{x-2}{x+2}$$

2. Achar o valor de x na equação $x + \frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{4} = 53$.

$$\text{Resp. } x = 105.$$

3. Resolver a equação $2x + \frac{x-1}{2} = x - a$.

$$\text{Resp. } x = \frac{b-3a}{a+3}$$

4. Ha dois números cuja somma é 37, e se tres vezes um delles for subtrahido de quatro vezes o outro e esta differença for dividida por 6, o quociente será 9. Quaes são os números? Resp. 16 e 21.

5. Achar os valores de x e y nas seguintes equações simultaneas: $2x + 7y = 65$ e $6x - 2y = 31$.

$$\text{Resp. } x = 8, y = 7.$$

6. Achar os valores de x , y e z no seguinte systema de equações: $2x + 6y + 5z = 93$, $4x + 3y + 8z = 95$ e $5x + 4y + 9z = 116$.

$$\text{Resp. } x = 7, y = 9, z = 5.$$

7. Elevar $m - n$ á quinta potencia por meio do binomio de Newton.

$$\text{Resp. } m^5 - 5m^4n + 10m^3n^2 - 10m^2n^3 + 5mn^4 - n^5.$$

8. Qual é a raíz quadrada de 178929? Resp. 423.

9. Reduzir o radical $\sqrt{48x^3y^2z}$ á sua forma mais simples. Resp. $4ab^2x^2\sqrt{3}$.

10. Achar o valor de x na equação $x^2 - 9x = 27$.

$$\text{Resp. } x = -3 \text{ ou } -9.$$

11. Resolver a equação $x + \sqrt{x^2 - 3x - 6} = 12$. Resp. $x = 4$.
12. Formar uma equação completa do segundo grau, cujas raízes sejam 5 e 6. Resp. $x^2 - 11x = -30$.
13. Dividir o numero 33 em duas partes de sorte que o seu producto seja 162. Resp. 27 e 6.
14. Achar o valor de x na proporção $x+4 : x+2 :: x+8 : x+5$. Resp. $x = 4$.
15. Achar o oitavo termo de uma progressão geometrica cujo primeiro termo seja 5, e a razão commum 4. Resp. 81920.
16. Decompor a expressão trinomia $x^2 + 6x - 27$ em dois factores binomios. Resp. $(x-3)(x+9)$.
17. A somma dos quadrados de dois numeros é 200, e a differença desses quadrados é 132; quaes são os numeros? Resp. ± 8 e ± 14 .
18. Um negociante comprou 3 peças de seda, que somavam 113 metros. A segunda peça tinha 11 metros mais do que a primeira, e a terceira tinha 17 metros mais do que a segunda; quantos metros tinha cada uma? Resp. 1.^a = 24, 2.^a = 35, 3.^a = 52.
19. Achar dois numeros cuja somma seja 16, e a somma dos seus quadrados seja 130. Resp. 7 e 9.
20. Um fazendeiro empregou na colheita do café 5 homens e 4 rapazes; no fim do primeiro dia de trabalho, pagou lhes o jornal que importou em 10\$500; no segundo dia empregou 8 homens e 6 rapazes, e pagou lhes na mesma razão, importando o salario em 16\$500; qual foi o jornal de cada homem, e de cada rapaz? Homem 1\$500, rapaz, \$750.
21. Na Noruega foi pescado um bacalhau cujo rabo pesava 9 kilos; a cabeça pesava tanto como o rabo e metade do corpo, e o corpo pesava tanto como o rabo e a cabeça; quanto pesava o peixe? Resp. 72 kilos.
22. Simplificar a expressão $5a^2 + 3mn - (2a^2 - mn - b)$. Resp. $3a^2 + 4mn + b$.
23. Quando Dante viu a Beatriz pela primeira vez, tinha 8 annos mais do que ella, e ella tinha $\frac{2}{3}$ da idade d'elle; quaes eram as suas idades? Resp. 7.

FIM

I
 I
 Adr
 P
 B
 TV
 Subl
 Pri
 Seg
 Ter
 Qua
 App
 m
 Multip
 Prin
 car
 Segu
 car
 Teor
 car
 Uo
 th
 Divisã
 Prin
 Seg
 Ter
 Theoremas
 Divisores e
 Decomposiç
 dos algebras
 Decomposiç
 mior
 Maximo divisor co